

Мастер-класс 23-24 сентября 2017 года.

Первый день.

*Задачи на движение, работу, проценты,
Задачи с физическим содержанием.
Теория вероятностей*

Второй день.

*Задачи на сплавы и смеси. Сложные текстовые задачи.
Задачи на среднюю скорость, на движение по окружности,
БОНУС: Задачи 17 и 19 (с экономическим содержанием и С6)*

1 день.

Тренировочные задачи.

Запишите в виде математического выражения:

- 1) x на 7 больше y
- 2) x в 5 раз меньше z
- 3) y меньше t в полтора раза
- 4) r составляет 12% от m
- 5) x меньше s на 8%
- 6) y больше q на 34 %
- 7) x не больше, чем y .

- 8) Велосипедист А едет медленнее, чем велосипедист В. Чья скорость больше? Чье время в пути больше?

Задачи ЕГЭ на движение

Для равномерного движения $S = v \cdot t$, то есть расстояние = скорость \cdot время. Из этой формулы легко найти t или v .

1. (Демо-вариант 2018 года)

Весной катер идёт против течения реки в $\frac{5}{3}$ раза медленнее, чем по течению. Летом течение становится на 1 км/ч медленнее. Поэтому летом катер идёт против течения в $1\frac{1}{2}$ раза медленнее, чем по течению. Найдите скорость течения весной (в км/ч).

2. Моторная лодка прошла против течения реки 63 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 8 км/ч. Ответ дайте в км/ч.
3. От пристани A к пристани B , расстояние между которыми равно 154 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 3 часа после этого следом за ним со скоростью на 3 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт B оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.
4. Пристань A и B расположены на озере, расстояние между ними 270 км. Баржа отправилась с постоянной скоростью из A в B . На следующий день после прибытия она отправилась обратно со скоростью на 1 км/ч больше прежней, сделав по пути остановку на 3 часа. В результате она затратила на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B . Найдите скорость баржи на пути из A в B . Ответ дайте в км/ч.
5. Мотоциклист задержался у шлагбаума на 24 минуты. Увеличив после этого свою скорость на 10 км/ч, он наверстал опоздание за 80 км. Определите скорость мотоциклиста до задержки.

Задачи ЕГЭ на работу

Правила решения:

1. $A = p \cdot t$, то есть работа = производительность · время. Из этой формулы легко найти t или p .

2. Если объем работы не важен и в задаче нет данных, позволяющих его найти, то работа принимается за единицу.

Например, построен дом (один). Написана книга (одна). А вот если речь идет о количестве кирпичей, булочек, страниц или построенных домов – работа как раз и равна этому количеству.

3. В качестве переменной удобно взять именно производительность.

4. Если трудятся двое рабочих (два экскаватора, два завода...) – их производительности складываются.

6. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 2 дня. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за 1 день выполняет такую же часть работы, какую второй — за 2 дня?
7. Завод получил заказ на партию штампованных деталей. Один автомат может отштамповать все детали за 19 часов. Через 1 час после того, как первый автомат начал штамповать детали, начал работу второй такой же автомат, и оставшиеся детали были распределены между двумя автоматами поровну. Сколько всего часов потребовалось на выполнение этого заказа?
8. Заказ на 272 детали первый рабочий выполняет на 1 час быстрее, чем второй. Сколько деталей за час изготавливает второй рабочий, если известно, что первый за час изготавливает на 1 деталь больше?
9. Игорь и Паша красят забор за 24 часа. Паша и Володя красят этот же забор за 35 часов, а Володя и Игорь — за 40 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроем?

Задача на арифметическую прогрессию

10. Бригада маляров красит забор длиной 270 метров, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 90 метров забора. Определите, сколько дней бригада маляров красила весь забор.

Задачи ЕГЭ на проценты

за 100% мы принимаем ту величину, с которой сравниваем.

если величину x увеличить на p процентов, получим

$$x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right);$$

если величину x уменьшить на p процентов, получим

$$x \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right);$$

если величину x увеличить на p процентов, а затем уменьшить на q процентов, получим

$$x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{q}{100}\right);$$

если величину x дважды увеличить на p процентов, получим

$$x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2;$$

если величину x дважды уменьшить на p процентов, получим

$$x \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2.$$

Тренировочные задачи:

- 1) Что больше – число 70, увеличенное на 80%, или число 80, увеличенное на 70%?
- 2) Что больше – 3% от 50 тысяч рублей или 50% от 3 тысяч рублей?
- 3) На сколько процентов 50 больше, чем 40? На сколько процентов 40 меньше, чем 50?
- 4) Число a увеличили на 70%. Полученное число увеличили на 40%. На сколько процентов в результате увеличилось число a ?
- 5) Одну сторону прямоугольника увеличили на 20%, а другую уменьшили на 20%. Как и на сколько процентов изменилась площадь прямоугольника?
- 6) В январе доход компании уменьшился на 30%, по сравнению с декабрьским, а в феврале увеличился на 30% по сравнению с январским. Увеличился или уменьшился доход компании по сравнению с декабрьским?
- 7) Знаменатель дроби увеличился на 100%. На сколько процентов уменьшилась дробь?
- 8) Автомобиль повысил скорость на 150%. На сколько процентов меньше времени ему потребуется теперь для прохождения того же расстояния?
- 9) На завтрак Карлсон съел 40% торта, а Малыш съел 150 г. На обед Фрекен Бок съела 30% остатка и ещё 120 г, а Матильда вылизала оставшиеся 90 г крошек от торта. Какой массы был торт изначально?
- 10) В результате проведённого в школе конкурса юных талантов призы получили 58% участников. Довольными итогами конкурса остались 95% участников, причём 60% из них получили призы. Какая часть недовольных участников конкурса получила призы?

(из подборки задач сайта mathus.ru)

11. Митя, Антон, Гоша и Борис учредили компанию с уставным капиталом 200000 рублей. Митя внес 14% уставного капитала, Антон — 42000 рублей, Гоша — 0,12 уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внес Борис. Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесенному в уставной капитал вкладу. Какая сумма от прибыли 1000000 рублей причитается Борису? Ответ дайте в рублях.
12. В среду акции компании подорожали на некоторое количество процентов, а в четверг подешевели на то же самое количество процентов. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в среду. На сколько процентов подорожали акции компании в среду?
13. Клиент А. сделал вклад в банке в размере 2500 рублей. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Ровно через год на тех же условиях такой же вклад в том же банке сделал клиент Б. Ещё ровно через год клиенты А. и Б. закрыли вклады и забрали все накопившиеся деньги. При этом клиент А. получил на 216 рублей больше клиента Б. Какой процент годовых начислял банк по этим вкладам?

Задача на геометрическую прогрессию

14. Бизнесмен Курицын получил в 2000 году прибыль в размере 1 000 000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 50% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей составила прибыль Коржова за 2004 год?

Задачи с прикладным содержанием. Приемы быстрого счета.

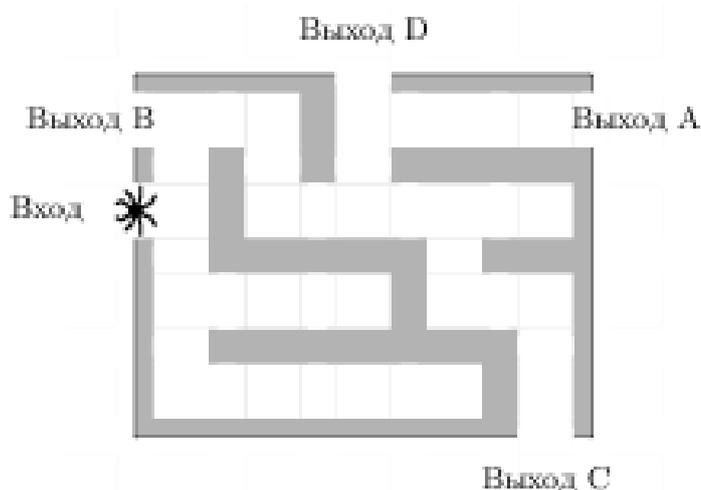
15. Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h километров над землёй, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{2Rh}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. С какой высоты горизонт виден на расстоянии 144 километров? Ответ выразите в километрах.
16. Некоторая компания продает свою продукцию по цене $p = 600$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 400$ руб., постоянные расходы предприятия $f = 600000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p - v) - f$. Определите месячный объем производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет равна 500000 руб.
17. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 50$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 55 до 70 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 260 до 300 см. Изображение на экране будет четким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$. Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы ее изображение на экране было четким. Ответ выразите в сантиметрах.

Теория вероятностей на ЕГЭ по математике (дополнительный материал) Мой супер-хит на Ютубе:

<https://www.youtube.com/watch?v=PQ8pmQVtiX0&t=2317s>

Вероятность события равна отношению числа благоприятных исходов к общему числу исходов.

18. В кармане у Миши было четыре конфеты — «Грильяж», «Белочка», «Коровка» и «Ласточка», а также ключи от квартиры. Вынимая ключи, Миша случайно выронил из кармана одну конфету. Найдите вероятность того, что потерялась конфета «Грильяж».
19. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 6 очков. Результат округлите до сотых.
20. Перед началом первого тура чемпионата по настольному теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 36 спортсменов, среди которых 8 участников из России, в том числе Иван Рыбин. Найдите вероятность того, что в первом туре Иван Рыбин будет играть с каким-либо спортсменом из России.
21. За круглый стол на 201 стул в случайном порядке рассаживаются 199 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что между девочками будет сидеть один мальчик.
22. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,06. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.
23. На рисунке изображён лабиринт. Паук заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и ползти назад паук не может, поэтому на каждом разветвлении паук выбирает один из путей, по которому ещё не полз. Считая, что выбор дальнейшего пути чисто случайный, определите, с какой вероятностью паук придёт к выходу D.



24. Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.
25. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.
26. В классе 33 учащихся, среди них два друга — Михаил и Олег. Учащихся случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найдите вероятность того, что Михаил и Олег окажутся в одной группе.
27. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватается первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.
28. На фабрике керамической посуды 10% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Результат округлите до сотых.
29. Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и обществознание.
- Вероятность того, что абитуриент З. получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку — 0,8, по иностранному языку — 0,7 и по обществознанию — 0,5.
- Найдите вероятность того, что З. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.
30. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.
31. *В кармане у Пети было 2 монеты по 5 рублей и 4 монеты по 10 рублей. Петя, не глядя, переложил какие-то 3 монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что пятирублевые монеты лежат теперь в разных карманах.

Второй день, 24 сентября.

32. «А это вам видеть пока рано», — сказала Баба-Яга своим 33 ученикам и скомандовала: «Закройте глаза!» Правый глаз закрыли все мальчики и треть девочек. Левый глаз закрыли все девочки и треть мальчиков. Сколько учеников всё-таки увидели то, что видеть пока рано?
33. Товарный поезд каждую минуту проезжает на 300 метров меньше, чем скорый, и на путь в 420 км тратит времени на 3 часа больше, чем скорый. Найдите скорость товарного поезда. Ответ дайте в км/ч.
34. Из пункта *A* в пункт *B* одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 13 км/ч, а вторую половину пути – со скоростью 78 км/ч, в результате чего прибыл в пункт *B* одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 48 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Задачи на сложение скоростей и движение протяженных тел

35. Автобусы из Москвы в Орёл выходят в начале каждого часа (в 00 минут). Автобусы из Орла в Москву выходят в середине каждого часа (в 30 минут). Поездка между городами занимает 5 часов. Сколько автобусов из Орла встретит автобус, вышедший из Москвы, на своём пути?
36. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 80 км/ч, проезжает мимо лесополосы, длина которой равна 500 метров, за 36 секунд. Найдите длину поезда в метрах.
37. По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют пассажирский и товарный поезда, скорости которых равны соответственно 80 км/ч и 50 км/ч. Длина товарного поезда равна 1200 метрам. Найдите длину пассажирского поезда, если время, за которое он прошёл мимо товарного поезда, равно 3 минутам. Ответ дайте в метрах.
38. По морю параллельными курсами в одном направлении следуют два сухогруза: первый длиной 120 метров, второй – длиной 80 метров. Сначала второй сухогруз отстает от первого, и в некоторый момент времени расстояние от кормы первого сухогруза до носа второго составляет 400 метров. Через 12 минут после этого уже первый сухогруз отстает от второго так, что расстояние от кормы второго сухогруза до носа первого равно 600 метрам. На сколько километров в час скорость первого сухогруза меньше скорости второго?

Средняя скорость не равна среднему арифметическому скоростей! Она находится по специальной формуле:

$$V_{\text{средняя}} = \frac{S_{\text{общее}}}{t_{\text{общее}}}$$

39. Путешественник переплыл море на яхте со средней скоростью 22 км/ч. Обрато он летел на спортивном самолёте со скоростью 418 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Задачи на движение по окружности

40. Сколько раз в течение суток угол между часовой и минутной стрелками составляет 90 градусов?
41. Из одной точки кольцевой дороги, длина которой равна 22 км, одновременно в одном направлении выехали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 113 км/ч, и через 30 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.
42. Два гонщика участвуют в гонках. Им предстоит проехать 46 кругов по кольцевой трассе протяжённостью 4 км. Оба гонщика стартовали одновременно, а на финиш первый пришёл раньше второго на 5 минут. Чему равнялась средняя скорость второго гонщика, если известно, что первый гонщик в первый раз обогнал второго на круг через 60 минут? Ответ дайте в км/ч.

Задачи ЕГЭ на сплавы и смеси

43. Смешали некоторое количество 12-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 20-процентного раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?
44. Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй — 35% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 250 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?
45. Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 14 килограммов изюма, если виноград содержит 90% воды, а изюм содержит 5% воды?
46. Аквариум частично заполнен водой. За месяц 40% воды испарилось. При этом объём воздуха увеличился на 60%. Какую часть объёма аквариума занимала вода в конце месяца?

Бонусные задачи:

47. (Задача 17, ЕГЭ-2017) В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму.

Условия его возврата таковы:

- Каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года,
- С февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга,

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за 3 года) и общая сумма выплат после полного погашения кредита на 48250 рублей больше суммы, взятой в кредит?

48. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- Каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года,
- С февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга,
- В июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 7,5 млн рублей?

49. (Задача №19, ЕГЭ-2017) Каждый из 28 студентов писал или одну из двух контрольных работ, или написал обе контрольные работы. За каждую работу можно было получить целое число баллов от 0 до 20 включительно. По каждой из двух контрольных работ в отдельности средний балл составил 15. Затем каждый студент назвал наивысший из своих баллов (если студент писал одну работу, то он назвал балл за неё). Среднее арифметическое названных баллов равно S .

- а) Приведите пример, когда $S < 15$.
- б) Могло ли оказаться, что только два студента написали обе контрольные работы, если $S = 13$?
- в) Какое наименьшее количество студентов могло написать обе контрольные работы, если $S = 13$?

Материалы для подготовки:

1. Книга Анны Малковой для подготовки к ЕГЭ по математике:
<https://www.labirint.ru/books/586726/>
2. Полный видеокурс Анны Малковой по теории вероятностей:
<http://www.youtube.com/watch?v=PQ8pmQVtiX0>
3. Полезные сайты для подготовки к ЕГЭ по математике.

1) <http://ege-study.ru>

Сайт Анны Малковой.

В разделе «Материалы ЕГЭ» - полный курс математики. Просто, понятно, без «воды». Вся теория и разбор задач ЕГЭ по математике. Бесплатно. Также в этом разделе – материалы для подготовки к ЕГЭ по другим предметам.

Заходите чаще! Раздел постоянно пополняется.

Другие полезные сайты:

2) www.reshuege.ru

Дистанционная обучающая система для подготовки к ЕГЭ по математике «РЕШУ ЕГЭ». Автор - Дмитрий Гущин. Тысячи заданий ЕГЭ с решениями и ответами.

3) www.alexlarin.net

Сайт Александра Ларина, на котором постоянно публикуются варианты пробных и реальных ЕГЭ. Тренировочные варианты ЕГЭ с разбором на форуме.

4) <http://mathus.ru/>

Сайт Игоря Яковлева. Информация обо всех московских олимпиадах по математике и физике, которые дают льготы при поступлении в вузы. Материалы по математике и физике для подготовки к ЕГЭ, дополнительным вступительным экзаменам и олимпиадам. Полные сборники задач по части 2 ЕГЭ по математике.

5) Легкий и бюджетный способ подготовиться к ЕГЭ на 100 баллов:

<http://dvd.ege-study.ru/>

Полный видеокурс Анны Малковой для успешной сдачи ЕГЭ по математике. 12 дисков. Более 30 часов видео.