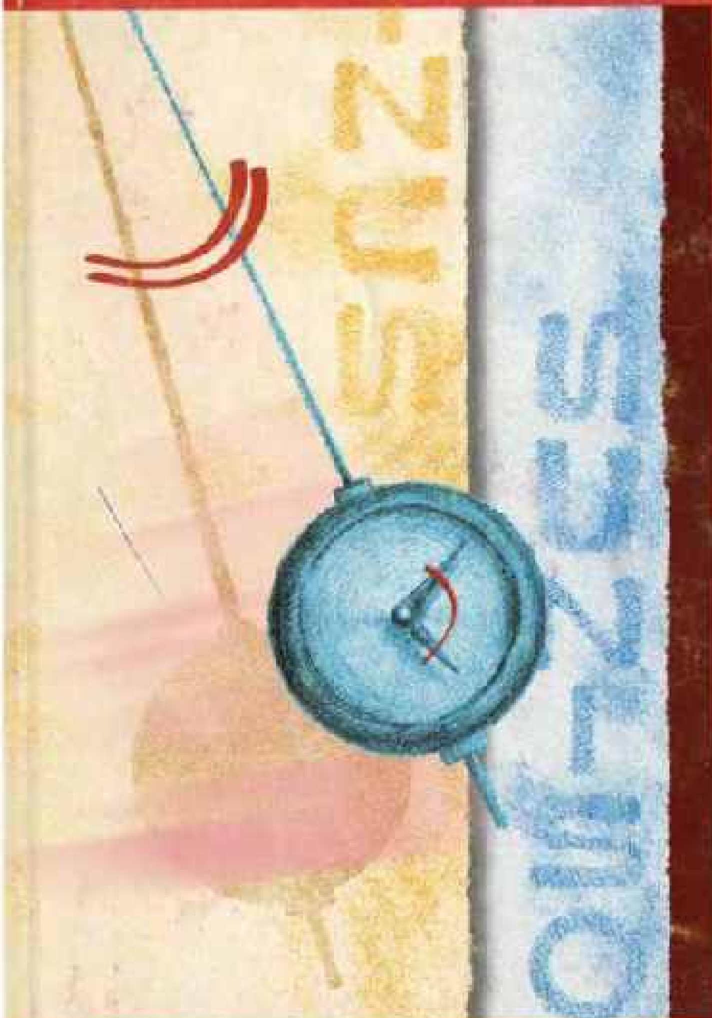
БИБЛИОТЕЧКА УЧИТЕЛЯ

КАРТОЧКИ ПО



10-11
классы

тригонометрии

Макеева А. В.

КАРТОЧКИ ПО тригонометрии

Дидактический материал для учителей

10-11 классы

Саратов
ОАО «Издательство «Лицей»
2002

УДК 372.8
ББК 74.262.21
М156

Рецензент: старший преподаватель кафедры математики и методики преподавания педагогического института СГУ *Т. В. Кастоева*.

Макеева А. В.

М156 Карточки по тригонометрии. 10—11 классы: Дидактический материал для учителей. — Саратов: «Лицей», 2002. — 128 с. — («Библиотечка учителя»).

ISBN 5-8053-0156-3

Учебное пособие предназначено для организации самостоятельной работы с учащимися 10—11 классов по курсу тригонометрии. Этот набор карточек, сгруппированных по темам, рассчитан на индивидуальную работу ученика. Пособие предназначено для учителей математики.

УДК 372.8
ББК 74.262.21

ISBN 5-8053-0156-3

Тригонометрические функции произвольного угла

Тригонометрические функции произвольного угла

Вариант №1

1. Определить знаки тригонометрических функций:

   а) $\sin(\pi + \alpha)$;

   б) $\cos(1{,}5\pi + \alpha)$;

   в) $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

2. Сравнить по величине $\sin 100^\circ$ и $\sin 130^\circ$.

3. Вычислить: $\dfrac{\left(\sin\frac{\pi}{4} + \cos 1{,}5\pi\right)\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} - \operatorname{ctg} 0{,}5\pi}$.

4. Найти в градусах: $\frac{2}{3}\pi$.

Тригонометрические функции произвольного угла

Вариант №2

1. Сравнить с нулем значение выражения $\cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

2. Определить знак разности: $\cos 200^\circ - \cos 210^\circ$.

3. Вычислить: $\dfrac{(\operatorname{tg}(\alpha - \beta) + \sin 2\beta)\cdot 2\cos\alpha}{\cos 3\alpha + \sin 9\beta}$, при $\alpha = 60^\circ$ и $\beta = 30^\circ$.

4. Найти в радианах угол 20°.

Вариант № 3

1. Определить знак:

   а) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$;

   б) $\sin(1{,}5\pi-\alpha)$;

   в) $\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)$, если $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

2. Сравнить по величине $\cos 300^\circ$ и $\cos 320^\circ$.

3. Вычислить: $\sin\dfrac{\pi}{2}+\cos 0^\circ-\operatorname{ctg}^2\dfrac{\pi}{6}$.

4. Выразить в радианах угол в $98^\circ 40'$.

Тригонометрические функции произвольного угла

Вариант № 4

1. Найти знак выражения: $\dfrac{\sin 100^\circ\cdot\cos 300^\circ}{\operatorname{tg} 200^\circ\cdot\operatorname{ctg} 150^\circ}$.

2. Определить знак:

   а) $\sin(360^\circ-\alpha)$;

   б) $\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)$;

   в) $\cos(270^\circ+\alpha)$, если $0<\alpha<90^\circ$.

3. Вычислить: $\dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}-\sin 1{,}5\pi}{\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{3}-\operatorname{tg}2\pi\right)\cdot\cos\dfrac{\pi}{6}}$.

4. Выразить в градусах 2,2141 радиан.

Вариант №5

1. Определите знак, если $0° < \alpha < 90°$:

а) $\sin(270° - \alpha)$;

б) $\cos(180° - \alpha)$;

в) $\mathrm{tg}(270° - \alpha)$.

2. Сравнить по величине $\mathrm{tg}\,100°$ и $\mathrm{tg}\,110°$.

3. Вычислить: $\dfrac{\left(\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{3} + \cos\dfrac{\pi}{6}\right)\cdot 2\,\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4}}{\cos\pi + \sin 1{,}5\pi}$.

4. Выразить в градусах $\dfrac{5}{6}\pi$.

Вариант №6*

1. Определить знак выражения: $\dfrac{\mathrm{tg}\,150° \cdot \sin 216°}{\cos 320° \cdot \mathrm{ctg}\,130°}$.

2. Вычислить: $3\cos(150° + \alpha) - 2\sin(180° + 3\alpha) + 5\,\mathrm{tg}\,6\alpha + 2\sin\alpha$, при $\alpha = 30°$.

3. Вычислить: $\dfrac{5\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + \sin\dfrac{3\pi}{2}}$.

4. Два угла треугольника содержат 0,9303 радиан и 1,0719 радиан. Сколько градусов содержит третий угол?

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

Вариант №1

1. Дано: $\sin\alpha = -0{,}6;\ \alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. Вычислить $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

2. Упростить выражения:

   а) $1 - \sin^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$; б) $\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} + \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$.

3. Доказать тождество: $\frac{1}{\cos\beta} - \cos\beta = \sin\beta \cdot \operatorname{tg}\beta$.

4*. Существует ли такое значение α, при котором:

   $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ и $\cos\alpha = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$? (Ответ поясните.)

Вариант №2

1. Дано: $\cos\alpha = -\frac{9}{41};\ \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Вычислить $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

2. Упростить выражения:

   а) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$; б) $\frac{1-\sin\alpha}{1+\cos\alpha} : \frac{1-\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$.

3. Доказать тождество: $\frac{1}{\sin\alpha} - \sin\alpha = \cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$.

4*. Существует ли такое значение α, при котором $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$ и $\sin\alpha = \frac{1-\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$? (Ответ поясните.)

Вариант № 3

1. Дано: $\sin\alpha = \frac{12}{13}$; $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Вычислить $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

2. Упростить выражения:

а) $\frac{\sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta} \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg} + 1$;

б) $(\sin\alpha + \cos\alpha) : \left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}\right)$.

3. Доказать тождество: $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{\operatorname{ctg}\alpha} = 1$.

4*. Вычислить $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

Вариант № 4

1. Дано: $\sin\alpha = -0{,}3$; $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$. Найти $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

2. Упростить выражения:

а) $\frac{1 - \sin^2\alpha}{1 - \cos^2\alpha} : \frac{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$;

б) $\sin^2\alpha : \left(\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1\right) + \cos^2\alpha : \left(\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1\right)$.

3. Доказать тождество: $\frac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\sin\alpha}} = \cos\alpha$.

4*. Вычислить при данных условиях $\operatorname{tg}\alpha$, если $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{2\cos\alpha - \sin\alpha} = 3$.

Вариант №5

1. Дано: $\cos\alpha = \frac{2}{3}$; $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$. Найти значения $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

2. Упростить:

   а) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha}$;

   б) $\left(\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2+\left(\frac{\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}\right)^2-\sin^2\alpha$.

3. Доказать тождество: $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{ctg}\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha$.

4*. Вычислить при данных условиях $\frac{\sin\alpha+8\cos\alpha}{5\sin\alpha-2\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=3$.

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

Вариант №6

1. Дано: $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Найти значения $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.

2. Упростить:

   а) $\sin\alpha\cos\alpha(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)$;

   б) $\frac{2\sin^2\alpha-1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$.

3. Доказать тождество: $(\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha)\cdot\operatorname{tg}^2\alpha=\cos^2\alpha$.

4*. Вычислить $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=m$.

Вариант №1

1. Дано: $\sin\alpha = -\frac{15}{17}$; $\cos\beta = \frac{8}{17}$; $\pi < \alpha < 1{,}5\pi$; $1{,}5\pi < \beta < 2\pi$.

   Вычислить $\cos(\alpha+\beta)$.

2. Упростить:

   а) $8\sin\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{18}\cdot\left(\cos^2\frac{\pi}{18}-\sin^2\frac{\pi}{18}\right)\cdot\left(\cos^2\frac{\pi}{9}-\sin^2\frac{\pi}{9}\right)-\cos\frac{\pi}{18}$.

   б) $\cos 10^\circ + \cos 11^\circ\cos 21^\circ + \cos 69^\circ\cos 79^\circ$.

3. Доказать тождество: $\frac{\sin 2\alpha - 2\sin\alpha}{\cos\alpha - 1} = 2\sin\alpha$.

4. Вычислить $\sin^2\alpha$, если $\cos 2\alpha = \frac{2}{5}$.

Вариант №2

1. Известно, что $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{12}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Найти $\sin\alpha$ и $\cos 2\alpha$.

2. Упростить: а) $\sin 20^\circ + \sin 13^\circ\sin 57^\circ - \sin 33^\circ\sin 77^\circ$;

   б) $1-\cos\left(\frac{\alpha}{2}-3\pi\right)-\cos^2\frac{\alpha}{4}+\sin^2\frac{\alpha}{4}$.

3. Доказать тождество: $\frac{\cos 2\alpha - \cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} = -1$.

4. Вычислить $\cos 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{5}$.

Вариант №3

1. Дано: $\sin\alpha = \frac{7}{25}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Вычислить $\sin 2\alpha$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$.

2. Упростить:

а) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta) - 2\cos\beta\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta) - 2\sin\alpha\sin\beta}$;

б) $\dfrac{2\cos^2\alpha - 1}{1 - 2\sin\alpha\cos\alpha} - \dfrac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}$.

3. Доказать тождество: $\dfrac{2}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} = \sin 2\alpha$.

4. Вычислить $\cos^2\alpha$, если $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$.

Вариант №4

1. Дано: $\cos\alpha = 0{,}6$; $\cos\beta = -0{,}28$; $1{,}5\pi < \alpha < 2\pi$; $\pi < \beta < 1{,}5\pi$. Вычислить $\sin(\alpha - \beta)$.

2. Упростить:

а) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{1 - 2\sin^2\alpha}$;

б) $\sqrt{2}\left(\sin^4\frac{\pi}{8} - \cos^4\frac{\pi}{8}\right)$.

3. Доказать тождество: $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{\cos 2\alpha} = \dfrac{2}{\sin 2\alpha}$.

4. Вычислить $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos 2\alpha = -\frac{5}{13}$ и $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

Вариант № 5

1. Дано: $\sin\alpha = -0{,}28$; $1{,}5\pi < \alpha < 2\pi$. Вычислить $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

2. Упростить:

а) $0{,}5\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha - 1$;

б) $\dfrac{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}$.

3. Доказать тождество: $(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha)\sin 2\alpha = 2\cos 2\alpha$.

4. Вычислить $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = 0{,}3$.

Вариант № 6

1. Синусы двух острых углов треугольника соответственно равны $\dfrac{20}{29}$ и $\dfrac{3}{5}$. Найти косинус внешнего угла треугольника, не смежного с двумя данными.

2. Упростить:

а) $1 - \cos\left(\dfrac{\alpha}{2} - 3\pi\right) - \cos^2\dfrac{\alpha}{4} + \sin^2\dfrac{\alpha}{4}$;

б) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$.

3. Доказать тождество: $\sin 4\alpha + \cos 4\alpha\cdot\operatorname{ctg} 2\alpha = \operatorname{ctg} 2\alpha$.

4. Вычислить без таблиц $\sin 75^\circ$.

Преобразование алгебраических сумм тригонометрических функций в произведение. Обратное преобразование

Преобразование алгебраических сумм тригонометрических функций в произведение

Вариант № 1

1. Представить в виде произведения:

а) $\sin\alpha+\cos\alpha$; б) $1+\cos\alpha+\cos 2\alpha$;

в) $\sqrt{2}+2\cos x$; г) $1-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$.

2. Представить в виде суммы или разности выражений: $2\sin 37^\circ\cdot\sin 13^\circ$.

3. Вычислить $\dfrac{2\sin x+\cos x}{\operatorname{ctg} x}$, если $\operatorname{tg} x=2$, x — угол I четверти.

Преобразование алгебраических сумм тригонометрических функций в произведение

Вариант № 2

1. Представить в виде произведения:

а) $\cos\alpha-\sin\beta$; б) $\sin 40^\circ+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\sqrt{3}-\operatorname{tg} x$; г) $4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}-\sin^2\alpha$.

2. Представить в виде суммы или разности выражений: $2\sin 4\alpha\cdot\cos 2\alpha$.

3. Вычислить $\dfrac{4\sin x+2\cos x}{\operatorname{tg} x}$, если $\operatorname{ctg} x=3$, x — угол I четверти.

Вариант № 3

1. Представить в виде произведения:

а) $\cos^2\alpha - \cos^2\beta$; б) $\frac{1}{2} + \sin\alpha$; в) $3 - 4\sin^2\alpha$.

2. Вычислить без таблиц:

$\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$.

3. Вычислить $\frac{\operatorname{tg} x}{2\sin x - 3\cos x}$, если $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$, x — угол I четверти.

4. Представить $\cos^2 x \cos 3x$ в виде суммы тригонометрических функций.

Вариант № 4

1. Представить в виде произведения:

а) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta$; б) $\frac{1 + 2\sin\alpha - \cos 2\alpha}{1 - 2\sin\alpha - \cos 2\alpha}$;

в) $\frac{\cos\frac{\alpha}{2} + \sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

2. Вычислить без таблиц:

$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ$.

3. Вычислить $(\sin x - 3\cos x) \cdot \operatorname{ctg} x$, если $\operatorname{tg} x = \frac{12}{5}$, x — угол I четверти.

4. Преобразовать в сумму: $4\cos^2 x \sin x$.

Вариант № 5

1. Представить в виде произведения:

а) $\dfrac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ}$; б) $\dfrac{1 + 2\cos\alpha + \cos 2\alpha}{1 - 2\cos\alpha + \cos 2\alpha}$;

в) $\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\beta} - 1$.

2. Вычислить без таблиц: $2\sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 50^\circ$.

3. Вычислить $(\sin x - 3\cos x)\operatorname{ctg} x$, если $\operatorname{ctg} x = \dfrac{12}{5}$, x — угол I четверти.

4. Вычислить без таблиц:

$$\sin^4\left(\frac{\pi}{16}\right) + \sin^4\left(\frac{3\pi}{16}\right) + \sin^4\left(\frac{5\pi}{16}\right) + \sin^4\left(\frac{7\pi}{16}\right).$$

Преобразование алгебраических сумм тригонометрических функций в произведение

Вариант № 6

1. Представить в виде произведения:

а) $\sin 24^\circ + \sin 26^\circ$; б) $\sqrt{3} + 2\cos\alpha$;

в) $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha - \sin\beta + \sin(\alpha + \beta)}$.

2. а) Вычислить:

$\operatorname{tg} 5^\circ \operatorname{tg} 15^\circ \operatorname{tg} 25^\circ \operatorname{tg} 35^\circ \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 55^\circ \operatorname{tg} 65^\circ \operatorname{tg} 75^\circ \operatorname{tg} 85^\circ$.

б) Вычислить без таблиц: $\dfrac{1}{\sin 10^\circ} - 4\cos 20^\circ$.

3. Доказать тождество:

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}.$$

Вариант №1

1. Найти область определения функции $y = \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\cos x}$.

2. Указать наибольшее и наименьшее значения функции:

   $y = 1 - \sin\dfrac{x}{2}$.

3. Найти наименьший положительный период функции:

   $y = \sin\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

4. Построить график функции $y = 3\cos\dfrac{x}{2}$ на периоде и указать промежутки монотонности функции.

Вариант №2

1. Найти область определения функции $y = \sin x + 1$.

2. Найти множество значений функции $y = \operatorname{tg} x - 1$.

3. Найти наименьший положительный период функции:

   $y = -\cos\dfrac{x}{4}$.

4. Построить график функции $y = 2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 1$ на периоде.

Вариант №3

1. Найти область определения функции $y = \dfrac{\sin x}{x}$.
2. Найти область значений функции $y = 2 + \cos x$.
3. Найти наименьший положительный период функции: $y = \operatorname{ctg} 3x - 1$.
4. Построить график функции $y = |\sin x|$ на периоде.

Вариант №4

1. Найти область определения функции $y = \dfrac{1}{\sin x}$.
2. Найти множество значений функции $y = 4 - \cos x$.
3. Найти наименьший положительный период функции: $y = \sin 4x + 3$.
4. Построить график функции $y = \sin|x|$, если $x \in [-2\pi; 2\pi]$.

Вариант №5

1. Найти область определения функции $y = \dfrac{\sin x}{2}$.
2. Найти область значений функции $y = 2\cos x + 5$.
3. Найти наименьший положительный период функции:
$$y = \left(\sin\frac{x}{4} + \cos\frac{x}{4}\right)^2.$$
4. Построить график функции $y = 3|\cos 4x| + 1$.

Вариант №1

1. Определить числовые значения следующих выражений:

 а) $\arccos(\sin 135^\circ)$;

 б) $\sin(2\,\mathrm{arctg}\,5)$.

2. Определить знак разности: $\arcsin 0{,}75 - \arcsin 1$.

3. Вычислить: $\arcsin 0 + \arccos 0 + \mathrm{arctg}\,0$.

4*. Решить уравнение: $6\arcsin(x^2 - 6x + 8{,}5) = \pi$.

5*. Вычислить:

 а) $\cos(\pi + 2\arcsin 0{,}8)$; б) $\mathrm{arctg}\left(\mathrm{ctg}\,\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Вариант №2

1. Определить числовые значения выражений:

 а) $\cos\left(\arcsin\dfrac{3}{5}\right)$;

 б) $\sin\left(\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. Определить знак разности: $\arccos 0{,}6 - \arccos 0{,}7$.

3. Вычислить: $\arccos\dfrac{1}{2} + \arcsin\dfrac{1}{2} - \mathrm{arctg}\,1$.

4*. Решить уравнение: $\arcsin(2x - 3) = \dfrac{\pi}{2}$.

5*. Вычислить: а) $\arccos(\sin 2)$; б) $\cos(\pi - \mathrm{arctg}\,2)$.

Вариант №3

1. Определить числовые значения:

а) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; б) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\right)$.

2. Определить знак разности: $\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 3$.

3. Вычислить: $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

4*. Решить уравнение: $\arcsin(x+1) = \frac{\pi}{6}$.

5*. Вычислить:

а) $\arccos(\sin 0{,}5)$; б) $\operatorname{tg}(\pi - \arcsin 0{,}6)$.

Вариант №4

1. Определить числовые значения выражений:

а) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}\right)$;

б) $\sin\left(2\arccos\frac{3}{5}\right)$.

2. Определить знак разности: $\arccos 1 - \arccos\frac{1}{2}$.

3. Вычислить: $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4*. Решить уравнение: $\arccos(x^2 - 2) = \pi$.

5*. Вычислить:

а) $\cos(2\operatorname{arcctg} 5)$; б) $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

Вариант № 5

1. Определить числовые значения выражений:

а) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$; б) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.

2. Определить знак разности: $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3. Вычислить: $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$.

4*. Решить уравнение: $\arccos(x^2-5x+7)=0$.

5*. Вычислить: а) $\arccos 1+2\arccos\frac{1}{2}$; б) $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Вариант № 6

1. Определить числовые значения выражений:

а) $\operatorname{tg}(\arcsin 1)$; б) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}2-\arccos\frac{12}{13}\right)$.

2. Определить знак разности: $\operatorname{arcctg}1-\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

3. Вычислить: $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4*. Решить уравнение: $\operatorname{arctg}(x^2-4x+3+\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}$.

5*. а) Вычислить: $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)$.

б) Проверить справедливость равенства: $2\arcsin\frac{2}{7}=\arccos\frac{41}{49}$.

Тригонометрические уравнения.
Уравнения вида:
$\sin x = a$; $\cos x = a$; $\operatorname{tg} x = a$; $\operatorname{ctg} x = a$

Вариант №1

1. $\sin\frac{2}{3}x = \frac{1}{2}$.

2. $\cos(2-3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{x^2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. $\operatorname{ctg} 3x = \sqrt{3}$.

Вариант №2

1. $\sin\frac{3\pi}{\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. $\cos 3x = \sqrt{1{,}1}$.

3. $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$.

4. $\operatorname{ctg}(3-4x) = 0$.

Вариант № 3

1. $\sin(3-2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. $\cos\pi\sqrt{x} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \sqrt{3}$.

4. $\operatorname{ctg}(x-\pi) = -1$.

Вариант № 4

1. $\sin 2x = \frac{\pi}{4}$.

2. $\cos\frac{5}{6}x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. $\operatorname{tg}\sqrt{\frac{\pi}{x}} = -1$.

4. $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$.

Вариант № 5*

1. $\sin\sqrt{\frac{\pi}{x}} = 0$.

2. $\cos(2x-1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{x} = 7$.

4. $\operatorname{ctg}\left(\frac{2}{3}\pi - x\right) = -1$.

Вариант № 6

1. $\sin x = \sqrt{1{,}01}$.

2. $\cos(3x - 2) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. $\mathrm{tg}\,\frac{2}{3x} = -1$.

4. $\mathrm{ctg}\,3x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Вариант № 7

1. $\sin x = \frac{\pi}{3}$.

2. $\cos\frac{2\pi x}{3} = 0$.

3. $\mathrm{tg}\,(2 - 3x) = 0$.

4. $\mathrm{ctg}\,\frac{3}{2}x = 5$.

Уравнения, приводимые к алгебраическим

Вариант № 1

1. $2\sin^2 x - 7\cos x - 5 = 0.$
2. $\cos 2x + 3\sin x = 2.$
3. $2\cos^2 3x + \sin 3x - 1 = 0.$
4. $\operatorname{ctg} x - \sqrt{3}\operatorname{tg} x + 1 = \sqrt{3}.$
5. $\sqrt{3 + 2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{1 + 3\operatorname{tg} x}{2}.$

Уравнения, приводимые к алгебраическим

Вариант № 2

1. $\sin 2x + 2\sin x - 3 = 0.$
2. $\sqrt{2}\sin^2 x + \cos x = 0.$
3. $\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x = 4.$
4. $1 - \cos(\pi - x) + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{x}{2}\right) = 0.$
5. $(\sin 3x + \cos 3x)^2 = 1 + \cos 2x.$

Уравнения, приводимые к алгебраическим

Вариант № 3

1. $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 = 0.$
2. $2\operatorname{tg}^4 3x - 3\operatorname{tg}^2 3x + 1 = 0.$
3. $\cos 2x + \cos x = 0.$
4. $\dfrac{1}{1 + \cos^2 x} + \dfrac{1}{\sin^2 x} = \dfrac{16}{11}.$
5. $\operatorname{tg}^2 x - 2\sin^2 x = 0$ на $\left(-\dfrac{3}{4}\pi; 2\pi\right).$

Вариант № 4

Уравнения, приводимые к алгебраическим

1. $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$.

2. $\cos^4 2x + 6\cos^2 2x = 1\frac{9}{16}$.

3. $2\,\mathrm{tg}\,x - 2\,\mathrm{ctg}\,x = 3$.

4. $\cos 2x + \sin^2 x + \sin x = 0{,}25$.

5. $29 - 36\sin^2(x-2) - 36\cos(x-2) = 0$.

Вариант № 5

Уравнения, приводимые к алгебраическим

1. $2\cos^2 x + 2\sqrt{2}\sin x - 3 = 0$.

2. $\mathrm{tg}^2 x - 2\,\mathrm{tg}\,x = 3$.

3. $2\cos^2(x + 30^\circ) - 3\sin(60 - x) + 1 = 0$.

4. $2\cos 2x - 4\cos x = 1$.

5. $\mathrm{ctg}\,x + \frac{\sin x}{1+\cos x} = 2$.

6. $4^{3+2\cos 2x} - 7\cdot 4^{1+\cos 2x} - 4^{\frac{1}{2}} = 0$.

Вариант № 6

Уравнения, приводимые к алгебраическим

1. $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$.

2. $\mathrm{tg}\,x + \mathrm{ctg}\,x = 2$.

3. $\sin^4\frac{x}{2} - \cos^4\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$.

4. $3\sin^2 2x + \sin 2x = (\sin x - \cos x)^2$.

5. $1 + \cos x = \mathrm{ctg}\frac{x}{2}$.

6. $2\cdot(x-6)\cos x = x - 6$.

Вариант № 7

1. $3 + 2\sin 2x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

2. $\dfrac{12}{\cos^2 x} - 25\operatorname{tg} x = 0$.

3. $2\sin^2 x + 5\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi - x\right) = 2$.

4. $\dfrac{4}{\pi}\operatorname{arctg} 1 - 3\cos x + \cos 2x = \dfrac{\cos(\pi - x)}{\operatorname{ctg} 2x + \operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)}$.

5. $\cos\dfrac{3\pi + x}{3} \cdot \cos\dfrac{9\pi + 2x}{6} = -\dfrac{5}{48}\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} 1{,}5)$.

Уравнения, решаемые разложением на множители

Вариант № 1

1. $\sin^2 x - \sin x = 0$.

2. $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x = 1$.

3. $5\sin x + 3\sin 2x = 0$.

4. $\cos 5x + \cos x = 0$.

5. $2\operatorname{tg}^3 x - 2\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x - 3 = 0$.

Вариант №2

Уравнения, решаемые разложением на множители

1. $\operatorname{ctg}^2 x - 4\operatorname{ctg} x = 0.$

2. $\sin 2x = \cos^4 \dfrac{x}{2} - \sin^4 \dfrac{x}{2}.$

3. $\sin 7x - \sin x = 0.$

4. $\cos^2 \dfrac{x}{3} + 2\sin^3 \dfrac{x}{3} = 1.$

5. $2\sin^3 x - \cos^2 2x - \sin x = 0.$

Вариант №3

Уравнения, решаемые разложением на множители

1. $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x = 0.$

2. $(1 + \cos 4x)\sin 2x = \cos^2 2x.$

3. $7\cos x - 4\sin 2x = 0.$

4. $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 4\cos 2x.$

5. $\dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = (\sin x + \cos x)^2.$

Вариант №4

Уравнения, решаемые разложением на множители

1. $\operatorname{tg}^3 x = \operatorname{tg} x.$

2. $\cos 2x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x).$

3. $\operatorname{ctg} 2x(\sin x - 1) = 0.$

4. $\cos x + \sin x = \cos 2x.$

5. $2\operatorname{ctg}^2 x \cos^2 x + 4\cos^2 x - \operatorname{ctg}^2 x - 2 = 0.$

Вариант № 5

1. $1-\cos x = 2\sin\dfrac{x}{2}$.

2. $\sin x + \cos x = 1 + \sin 2x$.

3. $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right) - \operatorname{tg}^2 x = (\cos 2x - 1)\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

4. $\dfrac{\cos x}{\sqrt{\pi^2 - x^2}} = 0$.

5. $\sin^4 x - 3\sin^3 x + 3\sin x - 1 = 0$.

Вариант № 6

1. $1-\cos 2x = \sqrt{3}\sin x$.

2. $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = 3\operatorname{ctg}\dfrac{2\pi - x}{4}$.

3. $1-\cos(\pi + x) - \sin\dfrac{3\pi + x}{2} = 0$.

4. $\sin x \operatorname{tg} x + 1 = \sin x + \operatorname{tg} x$.

5. $2\cos\dfrac{x}{6} - 1 = \cos\dfrac{x}{3}$.

Вариант № 7

1. $\sin^3 x - \cos^3 x = \sin x - \cos x$.

2. $\cos 2x = \sqrt{2}(\cos x + \sin x)$.

3. $\dfrac{\operatorname{ctg} x + 1}{\operatorname{ctg} x - 1} = (\sin x + \cos x)^2$.

4. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}} = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$.

5. $4\sin^2 x(1 + \cos 2x) = 1 - \cos 2x$. Найти решения уравнения, удовлетворяющие неравенству $x^2 < 4$.

Однородные уравнения

Вариант № 1

1. $2\sin x - 3\cos x = 0$.

2. $4\sin^2 x + 2\sin x\cos x = 3$.

3. $\sin x - \cos x - 4\cos^2 x\sin x = 4\sin^3 x$.

4. $3\cos^2 x - 4\sin x\cos x + \sin^2 x = 0$.

5. $(1 + \operatorname{tg}^2 x)(1 + \sin 2x) = 1$.

Однородные уравнения

Вариант № 2

1. $\sin 2x + \cos 2x = 0$.
2. $3\cos^2 x - 5\sin^2 x - \sin 2x = 0$.
3. $\dfrac{1}{\cos x} = 4\sin x + 6\cos x$.
4. $2\sin 4x - 3\sin^2 2x = 1$.
5. $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos 2x}$.

Однородные уравнения

Вариант № 3

1. $5\sin 3x - 2\cos 3x = 0$.
2. $\sin^2 x + 0{,}5\sin 2x - 2\cos^2 x = 0$.
3. $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{\sin x}$.
4. $\sin^2 x - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin x\cos x = \dfrac{1}{2}$.
5. $\dfrac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{ctg} x + 3$.

Однородные уравнения

Вариант № 4

1. $5\cos 2x - 3\sin 2x = 0$.
2. $\cos^2 x - 3\sin^2 x = 0$.
3. $3\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 2$.
4. $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 2x$.
5. $2\sin^2 x - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi + x\right) - \sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) = 4\arccos 1$.

Вариант №5

1. $\sin(x+30^\circ)+\cos(x+30^\circ)=0.$
2. $3\sin^2 2x-0{,}5\sin 4x-4\cos^2 2x=0.$
3. $2\sin^2 x+\cos^2 x+3\sin x\cos x=3.$
4. $\sin^2 x+\sin x\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)-\cos 2x=1.$
5. $\sin x+\cos x-1-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}(\cos x-1).$

Вариант №6

1. $2\sin^2 x+3\sin x\cos x+\cos^2 x=0.$
2. $\sin^6 x+\sin^4 x\cos^2 x=\sin^3 x\cos^3 x+\sin x\cos^5 x.$
3. $\cos^2 x-3\sin x\cos x+2\sin^2 x=2.$
4. $\frac{1}{\sin^2 x}=\operatorname{ctg} x+13.$
5. $\sin^2(x+\pi)+3\cos^2\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=1,\ \frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}.$

Вариант №7

1. $\cos^3 x\sin x+\cos^2 x\sin^2 x-3\cos x\sin^3 x-3\sin^4 x=0.$
2. $8\sin^2\frac{x}{2}+3\sin x-4=0.$
3. $\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0.$
4. $13\sin^2 x+84\sin 2x-13\cos^2 x+1=\frac{2\sin 18^\circ\cos 18^\circ}{\cos 54^\circ}.$
5. $\sqrt{1-\cos 2x}=\sqrt{2}\cos x.$

Уравнения, решаемые с помощью формул сложения тригонометрических функций

Уравнения, решаемые с помощью формул сложения тригонометрических функций

Вариант №1

1. $\sin x + \sin 3x = 4\cos^3 x$.
2. $\cos 2x + \cos x = 0$.
3. $\sin 3x + \sin 4x = 2\sin 3{,}5x$.
4. $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 5x - \cos 9x = 0$.
5. $\cos 3x - 2\cos 2x + \cos x = 0$.

Уравнения, решаемые с помощью формул сложения тригонометрических функций

Вариант №2

1. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x = 0$.
2. $\cos 2x + \sin x = 0$.
3. $\sin x + 2\cos x + \sin 3x = 0$.
4. $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\sin 3x$.
5. $\cos 7x + \sin 8x = \cos 3x - \sin 2x$.

Уравнения, решаемые с помощью формул сложения тригонометрических функций

Вариант №3

1. $\sin(15^\circ + x) + \sin(45^\circ - x) = 1$.
2. $\cos 2x - \cos x = 0$.
3. $\cos x + \sin x - \cos 3x = 0$.
4. $\sin 2x - \sin 3x + \sin 8x = \cos\left(\frac{3}{2}\pi + 7x\right)$.
5. $\sin 3x + \sin 5x = \sin 4x$.

Уравнения, решаемые с помощью формул сложения тригонометрических функций

Вариант № 4

1. $\sin 2x + \sin(\pi - 8x) = \sqrt{2}\cos 3x$.
2. $\cos 2x - \sin x = 0$.
3. $\sin(15^\circ + x) + \cos(45^\circ + x) + \frac{1}{2} = 0$.
4. $\sin x - \sin 3x - \sin 5x + \sin 7x = 0$.
5. $\frac{\sin x + \sin 2x}{\sin 3x} = 1$.

Уравнения, решаемые с помощью формул сложения тригонометрических функций

Вариант № 5

1. $0{,}5(\cos 5x + \cos 7x) - \cos^2 3x + \sin^2 3x = 0$.
2. $\cos 2x + \cos 5x = -2\cos 3{,}5x$.
3. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) - \sin(\pi - 5x) = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 3x)$.
4. $\operatorname{tg}\frac{21}{5}x + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{17}{5}x\right) = 0$.
5. $\cos x + \cos 2x = \sin 3x$.

Уравнения, решаемые с помощью формул сложения тригонометрических функций

Вариант № 6

1. $\sin 3x - \cos 3x = \sqrt{\frac{3}{2}}$.
2. $\sin 3x + \sin 7x = -2\sin 5x$.
3. $\operatorname{ctg} 15x + \operatorname{ctg} 3x = 0$.
4. $\cos x - \cos 3x = \sin 2x$.
5. $\sin 3x = 3\sin x$.

Вариант №7

1. $\sin 8x + \cos 7x = \cos 3x - \sin 2x$.

2. $\operatorname{tg}\left(\frac{2}{3}\pi - x\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 2\sin 2x$.

3. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 2$.

4. $\operatorname{tg}(120^\circ + 3x) + \operatorname{tg}(40^\circ + x) = 2\sin(80^\circ + 2x)$.

5. $\sin(3x + 5) - \sin(x + 1) = 2\sin(x + 2)$.

Уравнения, решаемые с помощью формул сложения углов и разложения произведения тригонометрических функций в сумму

Вариант №1

1. $\cos 3x \cos 2x = \sin 3x \sin 2x$.

2. $8\cos x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 1 = 0$.

3. $\cos(x + 70^\circ) \cdot \cos(x + 10^\circ) = \sin 30^\circ$.

4. $\cos x \cdot \cos 3x = \cos 5x \cos 7x$.

5. $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{1}{4}\sin 4x$.

Вариант № 2

1. $\cos 2x \cos x = \sin 2x \sin x$.
2. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \cdot \operatorname{ctg} 3x + \sin(\pi + 2x) - \sqrt{2} \cos 5x = 0$.
3. $\cos 7x \cdot \cos 3x = \cos 4x$.
4. $\sin(x+1)\cos 2(x+1) = \sin 3(x+1)\cos 4(x+1)$.
5. $\sin 2x \cdot \sin x + \cos^2 x = \sin 5x \cdot \sin 4x + \cos^2 4x$.

Уравнения, решаемые с помощью формул сложения углов и разложения произведения тригонометрических функций в сумму

Вариант № 3

1. $\sin 2x \cos x = \cos 2x \sin x$.
2. $\sin(x + 45^\circ)\sin(x - 15^\circ) = \frac{1}{2}$.
3. $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$.
4. $\sin\left(2x + \frac{3\pi}{20}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{20} - x\right) + \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{2\pi}{15}\right)\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{15}\right) = 0$.
5. $2\cos(x + 20^\circ)\cos x = \cos 40^\circ$.

Уравнения, решаемые с помощью формул сложения углов и разложения произведения тригонометрических функций в сумму

Вариант № 4

1. $\cos 3x \cos 4x = \cos 7x$.
2. $2\sin x \sin 2x + \cos 3x = 0$.
3. $2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{3\pi}{20}\right) = \cos\frac{2\pi}{5}$.
4. $\cos(x + 70^\circ)\cos(x + 10^\circ) = 0{,}5$.
5. $2\sin 5x \cos 6x + \sin x = \sin 7x \cos 4x$.

Вариант № 5

1. $\cos(3\alpha + 2x)\cos(3\alpha - 2x) + 0{,}75 = \cos^2 3\alpha$.

2. $\cos 2x \cos 3x = \cos 5x$.

3. $\sin(x + 45^\circ)\cos(x + 15^\circ) = 0{,}5$.

4. $\cos x \cos 4x - \cos 5x = 0$.

5. $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 0{,}5$.

Вариант № 6

1. $\sin 3x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) = \frac{1}{8}$.

2. $16 \sin x \cos 3x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = -1$.

3. $2\sqrt{2}\cos(45^\circ + x)(1 + \sin x) = 1 + \cos 2x$.

4. $\cos 7x - \cos^2 2x = -\sin^2 2x - \cos x$.

5. $\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = 2\cos 2x$.

Вариант № 7

1. $\sin x \sin\left(60^\circ - x\right)\sin\left(60^\circ + x\right) = \dfrac{1}{8}$.

2. $\dfrac{\cos^2 x - \sin^2 2x}{4\cos^2 x} = \sin\left(x + 30^\circ\right)\cdot\sin\left(x - 30^\circ\right)$.

3. $\dfrac{\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x} - 2\sin\left(45^\circ + x\right)\cdot\sin\left(45^\circ - x\right) = 0$.

4. $\sin 2x \cdot \sin x + \cos^2 x = \sin 5x \cdot \sin 4x + \cos^2 4x$.

5. $\operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{4\cos^2 x}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}}$.

Уравнения, решаемые с помощью формул понижения степени

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}; \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos^2\alpha}{2}$$

Вариант № 1

1. $2\sin^2 x + \cos 4x = 0$.

2. $\sin^2 6x + 8\sin^2 3x = 0$.

3. $\cos^2\dfrac{x}{2} + \cos^2\dfrac{3}{2}x - \sin^2 2x - \sin^2 4x = 0$.

4. $4\sin^2 x + \sin^2 2x = 3$.

5. $\sin^2 5x = \cos^2 2x - 2\sin^2 2x - 1$.

Вариант № 2

1. $2\cos^2 2x + \cos 10x - 1 = 0$.

2. $\sin^8 x + \cos^8 x = \dfrac{17}{32}$.

3. $\sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x$.

4. $\sin^2 2x + \sin^2 x = \dfrac{3}{2}$.

5. $\sin^4 x + \sin^4\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) + \sin^4\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Вариант № 3

1. $\sin^4 \dfrac{x}{2} + \cos^4 \dfrac{x}{2} = \sin x$.

2. $\cos 2x + 4\sin^4 x = 8\cos^6 x$.

3. $6\sin^2 x + 2\sin^2 2x = 5$.

4. $\cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 5x = \dfrac{3}{2}$.

5. $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{7}{8} - \dfrac{1}{2}\cos x \cos 3x$.

Вариант № 4

1. $2\cos^2 2x + \cos 10x - 1 = 0.$

2. $\cos 4x - 2\cos^2 x - 22\sin^2 x + 1 = 0.$

3. $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos^2 2x + 0{,}25.$

4. $\sin^2 \dfrac{x}{2} + \sin^2 \dfrac{3}{2}x = 1.$

5. $(\cos 5x + \cos 7x)^2 + (\sin x + \sin 7x)^2 = 0.$

Вариант № 5

1. $\sin^4\left(\dfrac{x}{2}\right) + \cos^4\left(\pi - \dfrac{x}{2}\right) = \sin x.$

2. $\cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 5x = \dfrac{3}{2}.$

3. $2 + \cos 4x - 5\cos 2x + 8\sin^6 x.$

4. $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \dfrac{\pi}{8}\right) + \cos^4 x = \dfrac{1}{2}\sin^2 2x.$

5. $\sin^4 \dfrac{2}{3}x + \cos^4 \dfrac{2}{3}x = a.$

Уравнения, решаемые с помощью формул понижения степени

Вариант № 6

1. $6\,\mathrm{tg}^2 x - 2\cos^2 x = \cos 2x$. (Указание: $\mathrm{tg}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$.)

2. $\sin^4 x + 5\cos 2x + 4 = 0$.

3. $2\sin^2 2x + \sin^2 4x = \dfrac{5}{4}$.

4. $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{9}{8}$.

5. $8\,\mathrm{tg}^2 \dfrac{x}{2} = 1 + \dfrac{1}{\cos x}$.

Уравнения вида $a\sin x + b\cos x = c$

Уравнения вида $a\sin x + b\cos x = c$

Вариант № 1

1. $5\sin x - 12\cos x = 13$.

2. $3\sin x + 5\cos x = 4$.

3. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = -\sqrt{3}$.

Уравнения вида $a\sin x + b\cos x = c$

Вариант № 2

1. $5\sin x - \cos x = 5$.

2. $\sin 4x + \cos 4x = 4$.

3. $2\cos x + 2\sin x = \sqrt{6}$.

Вариант № 3

Уравнения вида $a\sin x + b\cos x = c$

1. $\sin x - \sqrt{7}\cos x = \sqrt{7}$.

2. $\cos x - \sin x = 1$.

3. $2\cos x + \sin x = \sqrt{2}$.

Вариант № 4

Уравнения вида $a\sin x + b\cos x = c$

1. $\cos 3x - \sqrt{3}\sin 3x = 1$.

2. $\cos x - \sin x = 1{,}5$.

3. $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\sin 3x$.

Вариант № 5

Уравнения вида $a\sin x + b\cos x = c$

1. $4\sin x + 5\cos x = 6$.

2. $\cos x + \sin x = \sqrt{2}$.

3. $\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = -1$.

Вариант № 6

Уравнения вида $a\sin x + b\cos x = c$

1. $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

2. $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = \sqrt{2}$.

3. $\sqrt{3}\sin x - 2\cos x = 1$.

Вариант №7

1. $\sqrt{3}\sin x + 2\cos x = 1$.

2. $\sin 2x - \cos 2x + 1 = 0$.

3. $3\sin x + 4\cos x = 3$.

Уравнения смешанного типа

Вариант №1

1. $\sin x + \cos x = 2{,}5 + 5\sin x\cos x$.

2. Найти наименьший на интервале $(-\pi; 0)$ корень уравнения $\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)$.

3. $\cos^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{3}{2}x - \sin^2 2x - \sin^2 4x = 0$.

Вариант №2

1. $\sin x - \cos x + 5\sin x\cos x = 1$.

2. Найти наибольший на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ корень уравнения $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) + \sin x = 2\cos 3x$.

3. $\frac{2}{3}\cos^2 x + \sin x = 1$.

Вариант №3

1. Найти наибольший на интервале $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$ корень уравнения $\sin x - \sin 3x = \cos\left(5x + \frac{\pi}{2}\right)$.
2. $3\cos^2 x = 4\sin x \cos x - \sin^2 x$.
3. $\cos 5x + \cos 7x = \cos(\pi + 6x)$.

Вариант №4

1. Найти наименьший на интервале $\left(-\frac{3\pi}{2}; 0\right)$ корень уравнения $(1 + \cos 2x) \cdot \sin x = \cos^2 x$.
2. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2\cos 2x = 1$.
3. $2\operatorname{tg} x \cos x + 1 = 2\cos x + \operatorname{tg} x$.

Вариант №5

1. Найти все решения уравнения $\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = 1 - \sin x$, удовлетворяющие условию $\left|\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right| \le \frac{3\pi}{4}$.
2. $\cos 2x - \sin x + 2 = 0$.
3. $7\sin(x + 2\pi) = 2 + 2\cos^2 x$.

Вариант №6

1. Найти все решения уравнения:

$$\cos^4 x - 3\cos 3x = 3\cos x - \cos^3 x \cos 3x,$$

лежащие на промежутке $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

2. $\cos 3x \operatorname{tg} 5x = \sin 7x$.

3. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$.

Уравнения смешанного типа

Вариант №7

1. $\sin 2x - 4\sin x - 4\cos x + 4 = 0$. Указание: обозначить $y = \sin x + \cos x$, тогда $y^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$.

2. Найти все решения уравнения:

$$\frac{1}{2}(\cos 5x + \cos 7x) - \cos^2 2x + \sin^2 3x = 0,$$

удовлетворяющие условию $|x| < 2$.

3. $\frac{\cos x}{\cos 3x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = 8\sin x \sin 3x$.

Уравнения смешанного типа

Вариант №8

Решить уравнения:

1. $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x}$.

2. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \operatorname{tg} x - 2 = 0$.

3. $3^{\cos 2x} \cdot (4 \cdot 3^{\sin^2 x} - 9) = 1$. Указание: обозначить $3^{\cos^2 x} = y$.

Решение простейших тригонометрических неравенств

Решение простейших тригонометрических неравенств

Вариант № 1

1. $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. $2\cos x - \sqrt{2} \le 0$.

3. $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \le 0$.

Решение простейших тригонометрических неравенств

Вариант № 2

1. $\sin 2x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. $3\operatorname{ctg} x + 1 \ge 0$.

3. $2\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) < 3$.

Решение простейших тригонометрических неравенств

Вариант № 3

1. $|\cos x| \le \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. $\frac{1}{2}\left(\cos 3x - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. $\sin 2x \le \frac{1}{3}$.

Вариант №4

1. $\sin x > \frac{1}{2}$.

2. $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > 1$.

3. $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 1$.

Вариант №5

1. $\sin 2x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Найти область определения функции $y = \sqrt{4\cos^2 x - 3}$.

3. $\operatorname{ctg} x < -\sqrt{3}$.

Вариант №6

1. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{1}{2}$.

2. Найти область определения функции $y = \sqrt{3 - 4\sin^2 x}$.

3. $\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 < \sin x$.

Вариант №7

1. $\sin x > \cos^2 x$.

2. $\cos\frac{x}{3} > 0$.

3. Найти область определения функции $y = \sqrt{1 - 2\cos^2 x}$.

Вариант №8

1. $2\cos^2 x > \frac{3}{2}$.

2. $\sin x \geq \cos 2x$.

3. Упростить выражение:

$\sqrt{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha}$, если $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Вариант №9

1. $2\operatorname{tg}2x \leq 3\operatorname{tg}x$.

2. $\sin x + \sin 3x \geq 0$.

3. При каких значениях x на отрезке от 0 до 2π имеет смысл выражение $\sqrt{\frac{1}{2} - \sin x}$?

Решение систем тригонометрических уравнений

Решение систем тригонометр. уравнений

Вариант № 1

1. $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1, \\ x + y = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{3}, \\ \cos x \cos y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Решение систем тригонометр. уравнений

Вариант № 2

1. $\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{6}, \\ \sin x - \sin y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{6}, \\ \cos x \sin y = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$

Решение систем тригонометр. уравнений

Вариант № 3

1. $\begin{cases} \cos x + \cos y = \cos \dfrac{\pi}{8}, \\ x + y = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y = \dfrac{4}{3}\pi, \\ \sin x \cdot \sin y = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$

Решение систем тригонометр. уравнений

Вариант № 4

1. $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{3}, \\ \sin x \sin y = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y = \dfrac{5}{12}\pi, \\ \cos x \cos y = \dfrac{\sqrt{6}}{4}. \end{cases}$

Ответы

Тригонометрические функции произвольного угла

Вариант №1

1. а) «–»; б) «+»; в) «–».

2. $\sin 100^\circ > \sin 130^\circ$. 3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 4. 120°.

Вариант №2

1. >0. 2. «–». 3. $\frac{2+\left(\sqrt{3}\right)^2}{-4\sqrt{3}} = -\frac{5\sqrt{3}}{12}$. 4. $\frac{\pi}{9}$.

Вариант №3

1. а) «–»; б) «–»; в) «+». 2. $\cos 300^\circ < \cos 320^\circ$. 3. -3.

Вариант №4

1. «–». 2. а) «–»; б) «–»; в) «+». 3. 6. 4. $\approx 127^\circ$.

Вариант №5

1. а) «–»; б) «–»; в) «+».

2. $\operatorname{tg} 100^\circ < \operatorname{tg} 110^\circ$. 3. $-\frac{3}{2}\sqrt{3}$. 4. 150°.

Вариант №6*

1. «–». 2. 0. 3. $\frac{5\sqrt{3}}{2} - 1$. 4. $\approx 1{,}1378$ рад $\approx 65^\circ$.

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Основные тригонометрические формулы

Вариант №1

1. $\cos\alpha = -0{,}8$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$.

2. а) $2\cos^2\alpha$; б) 1. 4*. Нет.

Вариант №2

1. $\sin\alpha = \frac{40}{41}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{40}{9}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{9}{40}$.

2. а) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; б) $\operatorname{ctg}^2\alpha$. 4*. Нет.

Вариант №3

1. $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{12}{5}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{5}{12}$.

2. а) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; б) $\frac{1}{2}\sin 2\alpha$. 4*. $\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$.

Вариант №4

1. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{91}}{10}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{\sqrt{91}}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{91}}{3}$.

2. а) 1; б) 1. 4*. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{4}$.

Вариант № 5

1. $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

2. а) $-\operatorname{tg}^3\alpha$; б) $\cos^2\alpha$. 4*. $\frac{11}{13}$.

Вариант № 6

1. $\cos\alpha = \frac{-4}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{-3}{4}$. 2. а) 1; б) $\sin\alpha - \cos\alpha$. 4. $m^2 - 2$.

Тригонометрические функции суммы, разности, двойного и половинного аргумента

Вариант № 1

1. -1. 2. а) 0; б) $2\cos 10^\circ$. 4. $\frac{3}{10}$.

Вариант № 2

1. $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos 2\alpha = -\frac{119}{169}$. 2. а) 1; б) 0. 4. $\frac{12}{13}$.

Вариант № 3

1. $\sin 2\alpha = -\frac{336}{625}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{10}$.

2. а) $\operatorname{ctg}(\beta - \alpha)$; б) $\operatorname{tg} 2\alpha$. 4. $\cos^2\alpha = \frac{4}{5}$.

Вариант № 4

1. 0,8. 2. а) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha$; б) -1. 4. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{2}$.

Вариант № 5

1. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{7}$. 2. а) $0{,}5\cos\alpha-1$; б) $\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}=\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$. 4. $\frac{7}{20}$.

Вариант № 6

1. $\frac{24}{145}$. 2. а) 1; б) $-\cos2\alpha$. 4. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$.

Преобразование алгебраических сумм тригонометрических функций в произведение. Обратное преобразование

Вариант № 1

1. $\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$. 2. $4\cos\alpha\cdot\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

3. $4\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)$. 4. $\frac{\cos2\alpha}{\cos^2\alpha}$.

5. $\cos24^\circ-\cos50^\circ$. 6. $\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$.

Вариант № 2

1. $2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)$. 2. $2\sin50^\circ\cos10^\circ$.

3. $\frac{2\sin(60^\circ - x)}{\cos x}$. 4. $4\sin^4\frac{\alpha}{2}$. 5. $\sin 6\alpha + \sin 2\alpha$. 6. $\frac{30}{\sqrt{10}} = 3\sqrt{10}$.

Вариант №3

1. $-2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$. 2. $2\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

3. $4\sin(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ-\alpha)$ или $4\cos(30^\circ+\alpha)\cos(30^\circ-\alpha)$.

4. а) $\frac{1}{8}$; б) $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$. 5. $-\frac{5}{8}$.

6. $\frac{1}{2}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 5x$.

Указание: заменить $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.

Вариант №4

1. $2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$. 2. $\frac{\sin\alpha+1}{\sin\alpha-1} = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$.

3. $\frac{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. 4. $\frac{3}{16}$. 5. $-\frac{15}{156}$. 6. $\frac{2\sqrt{3}\sin(2x-30^\circ)}{\sin 2x}$.

Вариант №5

1. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 2. $\frac{\cos\alpha+1}{\cos\alpha-1} = \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$. 3. $\frac{\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)}{\sin^2\beta}$.

4. $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sin 50^\circ$. 5. $-\frac{132}{325}$. 6. $\frac{3}{2}$. Указание: воспользоваться формулами понижения степени и формулой $(a-b)^2$.

Вариант №6

1. $2\sin 25^\circ \cos 1^\circ$. 2. $4\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$. 3. $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$.

4. а) 1; б) 2. Указание: умножить и разделить левую часть тождества на $\sin\frac{\pi}{7}$ и воспользоваться формулами произведения тригонометрических функций.

Тригонометрические функции и их графики

Вариант №1

1. Все x, кроме $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k$; $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$.

2. $0\le 1-\sin x\le 2$. 3. $\frac{2}{3}\pi$.

4. Функция убывает, если $x\in(0+4\pi k; 2\pi+4\pi k, k\in Z)$; функция возрастает, если $x\in(2\pi+4\pi k; 4\pi+4\pi k, k\in Z)$.

Вариант №2

1. $D(f)=R$. 2. $E(f)=R$. 3. 8π. 4. $T=2\pi$.

Вариант №3

1. $D(f)=R$, кроме $x=0$. 2. $E(f)=[1;3]$. 3. $T=\frac{\pi}{3}$. 4. $T=2\pi$.

Вариант №4

1. $D(f)=R$, $\sin x\ne 0$, т. е. $x\ne\pi k$. 2. $E(f)=[3;5]$. 3. $T=\frac{\pi}{2}$.

Вариант № 5

1. $D(f)=R$. 2. $E(f)=[3;7]$. 3. $T=4\pi$. 4. $T=\dfrac{\pi}{2}$.

Обратные тригонометрические функции

Вариант № 1

1. а) 45°; б) $\dfrac{5}{13}$. 2. «–». 3. 1. 4*. 2; 4. 5*. а) 0,28; б) $-\dfrac{\pi}{6}$.

Вариант № 2

1. а) $\dfrac{4}{5}$; б) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 2. «+». 3. $\dfrac{\pi}{4}$. 4*. 2. 5*. а) $2-\dfrac{\pi}{2}$; б) $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Вариант № 3

1. а) $-\dfrac{\pi}{3}$; б) $\left(2-\dfrac{\pi}{2}\right)$. 2. «–». 3. $\dfrac{\pi}{12}$. 4*. $-\dfrac{1}{2}$.

5*. а) $0{,}5\pi-0{,}5$; б) $-\dfrac{3}{4}$.

Вариант № 4

1. а) $-\dfrac{\pi}{6}$; б) $\dfrac{24}{25}$. 2. «–». 3. $+\dfrac{\pi}{12}$.

4*. $x=\pm 1$. 5*. а) $\dfrac{12}{13}$; б) $\dfrac{7}{12}\pi$.

Вариант №5

1. а) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $-\sqrt{3}$. **2.** «–». **3.** $\frac{\pi}{6}$. **4*.** 2; 3. **5*.** а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Вариант №6

1. а) Не существует; б) $\frac{19}{22}$. **2.** «–». **3.** $\frac{\pi}{3}$. **4.** 1 и 3.

5. а) $\frac{3\pi}{10}$; б) воспользоваться формулами приведения.

Тригонометрические уравнения. Уравнения вида: $\sin x = a$; $\cos x = a$; $\operatorname{tg} x = a$; $\operatorname{ctg} x = a$

Вариант №1

1. $x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\pi n,\ n \in Z$. **2.** $x = \frac{2}{3} \pm \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n,\ n \in Z$.

3. $x = \pm\sqrt{\frac{6}{6n-1}},\ n \in Z$. **4.** $x = \frac{\pi}{18}(1+6n),\ n \in Z$.

Вариант №2

1. $x = \frac{81}{\left(3n+(-1)^{n+1}\right)^2},\ n \in Z$. **2.** Нет решения.

3. $x = \frac{\pi}{6}(3n+1),\ n \in Z$. **4.** $x = \frac{\pi}{8}(1+2n) + \frac{3}{4},\ n \in Z$.

Вариант №3

1. $x = (-1)^k \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k + \frac{3}{2},\ k \in Z$.

2. $x = \left(\frac{5}{6} + 2n\right)$; $\left(-\frac{5}{6} + 2k\right)$; $n, k \in N$.

3. $x = \frac{2}{3}\pi + 2\pi k, k \in Z$. 4. $x = \frac{\pi}{4}(4n+3), n \in Z$.

Вариант №4

1. $x = (-1)^n \frac{1}{2} \arcsin \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n, n \in Z$.

2. $x = \pm\frac{\pi}{5} + \frac{12}{5}\pi n, n \in Z$. 3. $x = \frac{16}{\pi(4n-1)^2}, n \in N$.

4. $x = \frac{\pi}{6}(6n+1), n \in Z$.

Вариант №5*

1. $x = \frac{1}{k^2\pi}, k \in N$. 2. $x = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{8}\pi + \pi n, n \in Z$.

3. $x = \frac{\pi}{\operatorname{arctg} 7 + \pi k}, k \in Z$. 4. $x = \frac{\pi}{12}(12n+11), n \in Z$.

Вариант №6

1. Нет решения. 2. $x = \frac{2}{3} \pm \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n, n \in Z$.

3. $x = \frac{8}{(4n-1)3\pi}, n \in Z$. 4. $x = \frac{\pi}{9}(3n+2), n \in Z$.

Вариант №7

1. Нет решения. 2. $x = \frac{3}{4}(2n+1), n \in Z$.

3. $x = \frac{\pi}{3}n + \frac{2}{3},\ n \in Z.$

4. $x = \frac{2}{3}\operatorname{arcctg}5 + \frac{2}{3}\pi n,\ n \in Z.$

Уравнения, приводимые к алгебраическим

Вариант № 1

1. $x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi k,\ k \in Z.$

2. $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n;\ \ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \ n, k \in Z.$

3. $x = (4k+1)\frac{\pi}{6};\ \ x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3};\ \ k, n \in Z.$

4. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n;\ \ x = \frac{\pi}{6} + \pi k;\ \ n, k \in Z.$

5. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ \ n \in Z.$ Указание: $\operatorname{tg} x \geq -\frac{1}{3}.$

Вариант № 2

1. $x = \frac{\pi}{2}(4k+1),\ \ k \in Z.$ 2. $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k,\ \ k \in Z.$

3. $x = \operatorname{arctg}3 + \pi k,\ \ k \in Z.$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$

4. $x = \pi(2k+1)$ и $x = \frac{4\pi}{3}(3k \pm 1).$

5. $x = (4n+1)\frac{\pi}{16};\ \ x = (4k+1)\frac{\pi}{8};\ \ n, k \in Z.$

Вариант №3

1. $x = (2n+1)\frac{\pi}{4}, \ n \in Z.$

2. $x = \pm\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{3}n, \ n \in Z; \ x = \frac{\pi}{12}(4k \pm 1), k \in Z.$

3. $x = \pi k; \ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \ k, n \in Z.$ 4. Нет решения.

5. $x = \pi n$ при $n = 0; 1;$ $x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$ при $k = 0; -1; 1; 2; 3.$

Вариант №4

1. $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$ 2. $x = \frac{\pi}{6}(3k \pm 1), k \in Z.$

3. $x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n, n \in Z$ или $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in Z.$

4. $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$

5. $x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{6}\right) + 2\pi n + 2, n \in Z.$

Вариант №5

1. $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$

2. $x = \frac{\pi}{4}(4n-1), n \in Z; \ x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k, k \in Z.$

3. $x = 30^\circ(12k \pm 1); \ x = 90^\circ(4k-1).$

4. $x = \frac{2}{3}(3n \pm 1)\pi, n \in Z.$

5. $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z.$

Указание: $\cos x\neq -1$, поэтому $\frac{1}{\sin x}=2$ и т.д.

6. $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z.$

Вариант №6

1. $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z.$

2. $x=\frac{\pi}{4}(4n+1),\ n\in Z.$

3. $x=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi n,\ n\in Z.$

4. $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \ x=(-1)^k\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}+\frac{\pi k}{2};\ \ n,k\in Z.$

5. $x=\pi(2n+1);\ \ x=\frac{\pi}{2}(4k+1);\ \ n,k\in Z.$

6. $x=6;\ \ x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \ n\in Z.$

Вариант №7

1. $x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in Z.$ Указание: $3+2\sin 2x=\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin x\cos x}$;

$3+2\sin 2x=\frac{2}{\sin 2x}$; $\sin 2x\neq 0$; $2x\neq k\pi$; $x=\frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$ и т.д.

2. $x=(-1)^n\frac{1}{2}\arcsin\frac{24}{25}+\frac{\pi}{2}n,\ \ n\in Z.$

Указание: $\cos x\neq 0$; $x\neq\frac{\pi}{2}(2n+1)$.

3. $x = \frac{\pi}{2}(2n+1),\ n \in Z$. 4. $x = \frac{\pi}{2}(2n+1),\ n \in Z$.

5. $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}n,\ n \in Z$.

Уравнения, решаемые разложением на множители

Вариант №1

1. $x = k\pi,\ k \in Z$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.

2. $x = k\pi,\ k \in Z$; ~~$x = 2\pi n,\ n \in Z$.~~ $\frac{\pi}{4} + \pi k$;

3. $x = k\pi,\ k \in Z$; $x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{5}{6}\right) + 2\pi k,\ k \in Z$.

4. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k,\ k \in Z$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z$.

5. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

Вариант №2

1. $x = \frac{\pi}{2}(2n+1),\ n \in Z$; $x = \operatorname{arctg} 4 + k\pi,\ k \in Z$.

2. $x = \frac{\pi}{2}(2n+1),\ n \in Z$; $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

3. $x = \frac{\pi k}{3},\ k \in Z$; $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}n,\ n \in Z$.

4. $x = 3\pi k,\ k \in Z$; $x = (-1)^n\frac{\pi}{2} + 3\pi n,\ n \in Z$.

5. $x = \frac{\pi}{4}(2n+1),\ n \in Z$; $x = \frac{\pi}{2}(4k-1),\ k \in Z$;

$x = (-1)^m \frac{\pi}{6} + m\pi,\ m \in Z$. Указание: $2\sin^3 x = \sin x \cdot 2\sin^2 x$ и $2\sin^2 x = (1 - \cos 2x)$ и далее разложить на множители.

Вариант №3

1. $x = \pi k,\ k \in Z;\ \ x = \mathrm{arctg}\, 2 + \pi n,\ n \in Z.$

2. $x = \frac{\pi}{4}(2k+1),\ k \in Z;\ \ x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z.$

3. $x = \frac{\pi}{2}\pi k,\ k \in Z;\ \ x = (-1)^{n+1} \arcsin\frac{7}{8} + \pi n,\ n \in Z.$

4. $\frac{\pi}{4}(2k+1),\ k \in Z.$ 5. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;\ \ x = \pi k,\ k \in Z.$

Вариант №4

1. $x = k\pi;\ x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n;\ k, n \in Z.$

2. $\frac{\pi}{4}(4n+1),\ n \in Z;\ \ x = \frac{\pi}{4}(8k+1),\ k \in Z.$

3. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z;\ \ x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$

4. $x = \frac{\pi}{4}(4n-1),\ n \in Z;\ \ x = 2\pi k,\ k \in Z;\ \ x = -\frac{\pi}{2} + m\pi,\ m \in Z.$

5. $x = \frac{\pi}{4}(2n+1),\ n \in Z.$

Вариант №5

1. $x = 2\pi k,\ k \in Z;\ \ x = \pi + 4\pi n,\ n \in Z.$

2. $x = \frac{\pi}{4}(4k-1),\ k \in Z;\ \ x = \pm\frac{\pi}{4} + (8n+1)\frac{\pi}{4},\ n \in Z.$

3. $x = k\pi,\ k \in Z;\ \ x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

4. $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z;\ \ x \neq \pm\pi.$

5. $x = \frac{\pi}{2}(2k+1),\ k \in Z;\ x = (-1)^n \arcsin\frac{3-\sqrt{5}}{2} + \pi n,\ n \in Z.$

Указание: $3\sin x \cdot \left(1-\sin^2 x\right) - \left(1-\sin^4 x\right) = 0$ и т. д.

Вариант №6

1. $x = k\pi,\ k \in Z;\ x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$

2. $x = 4k\pi,\ k \in Z;\ \ x = \pm\frac{2}{3}\pi + 4\pi n,\ n \in Z.$

3. $x = \pi(2k+1),\ k \in Z;\ \ x = \frac{4}{3}\pi(3n \pm 1),\ n \in Z.$

4. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$ 5. $x = 12\pi k,\ k \in Z;\ \ x = 3\pi(2n+1),\ n \in Z.$

Вариант №7

1. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z;\ \ x = \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$

2. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z;\ \ x = 2\operatorname{arctg}\left(1-\sqrt{2}\right) + 2\pi n,\ n \in Z.$

3. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$

4. $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z;\ \ x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

5. $x = \pm\frac{\pi}{3};\ \ x = 0.$

Вариант №1

1. $x = \operatorname{arctg}\frac{3}{2} + k\pi,\ k \in Z.$

2. $x = -\operatorname{arctg}3 + k\pi;\ \frac{\pi}{4} + \pi n;\ k, n \in Z.$

3. ~~Нет решений.~~ $x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n$

4. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k;\ x = \operatorname{arctg}3 + \pi n;\ k, n \in Z.$

5. $x = \pi k;\ x = -\operatorname{arctg}2 + \pi n;\ k, n \in Z.$

Указание: $\frac{1}{\cos^2 x} \cdot (1 + \sin 2x) = 1;\ \cos x \neq 0,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z.$

Вариант №2

1. $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z.$

2. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z;\ x = \operatorname{arctg}\frac{3}{5} + n\pi,\ n \in Z.$

3. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z;\ x = -\operatorname{arctg}(-5) + \pi n,\ n \in Z.$

4. $x = \frac{1}{2}\operatorname{arcctg}2 + \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z.$ 5. $x = \pm\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}2 + \pi n,\ n \in Z.$

Вариант №3

1. $x = 7^\circ 16' + 60^\circ n,\ n \in Z.$

2. $x = \frac{\pi}{4}(4k+1),\ k \in Z;\ \ x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in Z.$

3. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

4. $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z;\ \ x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in Z.$

5. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;\ \ x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$

Вариант №4

1. $x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{5}{3} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z.$

2. $x = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1),\ k \in Z.$

3. $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k,\ k \in Z;\ \ x = \frac{\pi}{4}(4k+1)$

4. $x = \frac{\pi}{8}(4k-1),\ k \in Z.$

5. $x = \frac{\pi}{4}(4k+1),\ k \in Z;\ \ x = -\operatorname{arcctg} 2 + k\pi,\ k \in Z.$

Вариант №5

1. $x = -75^\circ + 180^\circ k.$

2. $x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3} + \frac{1}{2}\pi k,\ k \in Z;\ \ x = \frac{\pi}{8}(4k_1 - 1),\ k_1 \in Z.$

3. $x = \frac{\pi}{4}(4k-1),\ k \in Z;\ \ x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k_1,\ k_1 \in Z.$

4. $x = \frac{\pi}{4}(4k - 1),\ k \in Z;\ \ x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in Z.$

5. $x = 2\operatorname{arctg} 2 + 2\pi n,\ n \in Z.$

Вариант №6

1. $x = \frac{\pi}{4}(4k - 1),\ k \in Z;\ \ x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \pi n,\ n \in Z.$

2. $x = \pi k,\ k \in Z;\ \ x = \frac{\pi}{4}(4n + 1),\ n \in Z.$

3. $x = \frac{\pi}{2}(2k + 1),\ k \in Z;\ \ x = -\operatorname{arcctg} 3 + \pi n,\ n \in Z.$

4. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z;\ \ x = \operatorname{arctg}\left(\frac{3 \pm \sqrt{6}}{6}\right) + \pi n,\ n \in Z.$

5. $x = \frac{5}{6}\pi;\ \ x = \frac{7}{6}\pi.$

Вариант №7

1. $x = \pi k;\ \ x = \frac{\pi}{4}(4k_1 - 1);\ \ x = \frac{\pi}{6}(6k_2 \pm 1);\ \ k,\ k_1, k_2 \in Z.$

2. $x = 2\pi k + 2\operatorname{arcctg}\frac{1}{2},\ k \in Z;\ \ x = 2\pi n - 2\operatorname{arctg} 2,\ n \in Z.$

3. $x = \frac{\pi}{12}(12k - 1),\ k \in Z.$

4. $x = \operatorname{arcctg} 13 + \pi k,\ k \in Z;\ x = \pi - \operatorname{arcctg} 13 + \pi n,\ n \in Z.$

5. $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z\ \left(\cos x \geq 0;\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right).$

Уравнения, решаемые с помощью формул сложения тригонометрических функций

Вариант №1

1. $x = \frac{\pi}{2}(2k+1),\ k \in Z;\ \ x = \frac{\pi}{4}(4n+1),\ n \in Z.$

2. $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi k,\ k \in Z;\ \ x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z.$

3. $x = \frac{2}{7}\pi k,\ k \in Z;\ \ x = 4\pi n,\ n \in Z.$

4. $x = \frac{\pi k}{2},\ k \in Z;\ \ x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{21} + \frac{\pi n}{7},\ n \in Z.$

5. $x = \frac{\pi}{4}(2k+1),\ k \in Z;\ \ x = 2\pi n,\ n \in Z.$

Вариант №2

1. $x = \frac{\pi}{3}k,\ k \in Z.$

2. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z;\ \ x = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi n,\ n \in Z.$

3. $x = \frac{\pi}{2}(2k+1),\ k \in Z;\ \ x = \frac{\pi}{4}(4n-1),\ n \in Z.$

4. $x = \frac{\pi}{4}(8k+1),\ k \in Z;\ \ x = \frac{\pi}{20}(8n+3),\ n \in Z.$

5. $x = \frac{\pi}{5}k,\ k \in Z;\ \ x = \frac{\pi}{10}(4n+1),\ n \in Z;\ \ x = \frac{\pi}{2}(4m-1),\ m \in Z.$

Вариант №3

1. $x = \pm 120^\circ + 15^\circ(24k+1),\ k \in Z$.

2. $x = \dfrac{2\pi k}{3}$; $x = 2\pi k,\ k \in Z$.

3. $x = \pi k,\ k \in Z$; $x = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$.

4. $x = \dfrac{\pi}{5}k,\ k \in Z$; $x = 2\pi n,\ n \in Z$.

5. $x = \dfrac{\pi}{4}k,\ k \in Z$; $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Вариант №4

1. $x = \dfrac{\pi}{6}(2k+1),\ k \in Z$; $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{\pi}{5}n,\ n \in Z$.

2. $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$; $x = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2}{3}\pi n,\ n \in Z$.

3. $x = \pm 120^\circ + 15^\circ(24k+1),\ k \in Z$.

4. $x = \dfrac{\pi k}{4},\ k \in Z$; $x = \pi n,\ n \in Z$. 5. Нет решения.

Вариант №5

1. $x = \dfrac{\pi}{12}(2k+1),\ k \in Z$; $x = 2\pi n,\ n \in Z$.

2. $x = \dfrac{\pi k}{3}$; $x = \dfrac{\pi k}{2}$.

3. $x = \frac{\pi}{12}(12k - 1),\ k \in Z;\ \ x = \frac{\pi}{16}(4n + 1),\ n \in Z.$

4. $x = \frac{5}{38}\pi k,\ k \in Z.$

5. $x = \frac{\pi}{3}(2k + 1),\ k \in Z;\ \ x = \frac{\pi}{4}(4n + 1);\ \ x = \frac{\pi}{2}(4m + 1);\ n,\ m \in Z.$

Вариант №6

1. $x = (-1)^k \frac{\pi}{9} + (4k + 1)\frac{\pi}{12},\ k \in Z.$

2. $x = \frac{\pi k}{5},\ k \in Z;\ \ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$

3. $x = 2\pi k,\ \ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$ Указание: раскрыть $\cos(45^\circ + x)$ и выделить общий множитель $(\cos x - 1)$.

4. $x = \frac{\pi k}{2},\ k \in Z;\ \ x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$

5. $x = \pi k,\ k \in Z$. Указание: $\sin 3x - \sin x = 2\sin x.$

Вариант №7

1. $x = \frac{\pi}{5}k,\ k \in Z;\ \ x = \frac{\pi}{10}(4k + 1),\ k \in Z.$

2. $x = \frac{\pi}{2}k,\ k \in Z;\ \ x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z.$

3. $x = \operatorname{arctg} x\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + \pi k,\ k \in Z.$

4. $x = -40^\circ + 60k,\ k \in Z.$

Указание: обозначить $(40^\circ + x) = y$; $\operatorname{tg} 3y + \operatorname{tg} y = 2\sin 2y$ и т.д.

5. $x = -2 + \pi k,\ k \in Z$; $x = -1{,}5 + \pi k,\ k \in Z$.

Уравнения, решаемые с помощью формул сложения углов и разложения произведения тригонометрических функций в сумму

Вариант №1

1. $x = \dfrac{\pi}{10}(2n+1),\ n \in Z$.

2. $x = \dfrac{2}{9}\pi(3n \pm 1),\ n \in Z$.

3. $x = -10^\circ + 180^\circ k,\ k \in Z$; $x = -70^\circ + 180^\circ k,\ k \in Z$.

4. $x = \dfrac{\pi k}{8},\ k \in Z$. 5. $x = \dfrac{\pi}{2}k$; $x = \dfrac{\pi}{3}k$; $x = \pi k$; $k \in Z$.

Вариант №2

1. $x = \dfrac{\pi}{6}(2n+1),\ n \in Z$.

2. $x = \dfrac{\pi}{10}(2n+1),\ n \in Z$; $x = (-1)^k\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{3}n,\ n \in Z$.

3. $x = \dfrac{\pi k}{7}$; $x = \dfrac{\pi}{3}(3k \pm 1),\ k \in Z$.

4. $x = \dfrac{\pi k}{2} - 1$; $x = \dfrac{\pi k}{5} + \dfrac{\pi}{10} - 1,\ k \in Z$.

5. $x = \dfrac{\pi}{3}(3k \pm 1)$; $x = \dfrac{\pi}{11}(2k+1)$; $x = 2\pi k,\ k \in Z$.

Вариант №3

1. $x = \pi k, k \in Z$.

2. $x = 45^\circ + 180^\circ k$; $x = -75^\circ + 180^\circ k, k \in Z$.

3. $x = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1), k \in Z$.

4. $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}$; $x = \frac{29\pi}{90} + \frac{2\pi k}{3}, k \in Z$.

5. $x = -60^\circ + 180^\circ k$; $x = 40^\circ + 180^\circ k, k \in Z$.

Вариант №4

1. $x = \frac{\pi}{3}k, k \in Z$; $x = \frac{\pi}{4}k, k \in Z$.

2. $x = \frac{\pi}{2}(2k+1), k \in Z$.

3. $x = \frac{\pi}{10}(10k-1), k \in Z$.

4. $x = -10^\circ + 180^\circ k$; $x = -70^\circ + 180^\circ k, k \in Z$.

5. $x = \frac{\pi}{4}k$; $x = \frac{\pi}{14}(2k+1), k \in Z$.

Вариант №5

1. $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$.

2. $x = \frac{\pi k}{3}, k \in Z$; $x = \frac{\pi n}{2}, n \in Z$.

3. $x = (-1)^k \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 30^\circ$.

4. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$. 5. Нет решения.

Вариант №6

1. $x = (-1)^k \frac{\pi}{54} + \frac{2\pi k}{9}$.

2. $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$.

3. $x = (-1)^n \arcsin\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (4n - 1)\frac{\pi}{4}, n \in Z$.

4. $x = \frac{\pi}{8}(2n + 1), n \in Z$; $x = \frac{\pi}{9}(6k \pm 1), k \in Z$.

5. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$; $x = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3} \pm 2\right) + \pi n, n \in Z$.

Вариант №7

1. $x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + n\frac{\pi}{3}, n \in Z$.

2. $x = 30^\circ(6k \pm 1), k \in Z$. 3. $x = \frac{\pi}{8}(4k + 1), k \in Z$.

4. $x = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$; $x = \frac{\pi}{11}(2k + 1)$; $x = 2\pi k, k \in Z$.

5. Нет решения.

Уравнения, решаемые с помощью формул понижения степени

Вариант №1

1. $x = \frac{\pi}{4}(2n+1),\ n \in Z;\ \ x = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1),\ k \in Z.$

2. $x = \frac{\pi k}{3},\ k \in Z.$ 3. $x = \frac{\pi}{4}(2n+1),\ n \in Z.$

4. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k,\ k \in Z.$ 5. $x = 10\pi m,\ m \in Z.$

Вариант №2

1. $x = \frac{\pi}{6}(2n+1),\ n \in Z;\ \ x = \frac{\pi}{14}(2k+1),\ k \in Z.$

2. $x = \frac{\pi}{8}(2n+1),\ n \in Z.$ 3. $x = \frac{\pi k}{2},\ k \in Z;\ \ x = \frac{\pi n}{9},\ n \in Z.$

4. $x = \frac{\pi}{4}(2n+1),\ n \in Z;\ \ x = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1),\ k \in Z.$ 5. $x = \pi k,\ k \in Z.$

Вариант №3

1. $x = (-1)^n \arcsin(\sqrt{3} - 1) + \pi n,\ n \in Z.$

2. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z.$ 3. $x = \frac{\pi}{4}(2n+1),\ n \in Z.$

4. $x = \frac{\pi}{16}(2n+1),\ n \in Z;\ \ x = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1),\ k \in Z.$

5. $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1 \pm \sqrt{41}}{8}\right) + \pi n,\ n \in Z.$

Вариант №4

1. $x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi k}{7}$; $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$.

2. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.

3. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

4. $x = \frac{\pi}{2}(2k+1),\ k \in Z$; $x = \frac{\pi}{4}(2n+1),\ n \in Z$.

5. $x = \frac{\pi}{4}(2k+1),\ k \in Z$; $x = \frac{\pi}{2}(2n+1),\ n \in Z$.

Вариант №5

1. $x = (-1)^n \arcsin\left(\sqrt{3}-1\right) + \pi n,\ n \in Z$.

2. $x = \frac{\pi}{16}(2n+1),\ n \in Z$; $x = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1),\ k \in Z$.

3. $x = \frac{\pi}{4}(2n+1),\ n \in Z$. 4. Нет решения.

5. $x = \pm\frac{3}{8}\arccos(4a-3) + \frac{3}{4}\pi n,\ n \in Z$; $\frac{1}{2} \le a \le 1$.

Вариант №6

1. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$.

2. $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.

3. $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$. 4. Нет решения.

5. $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)+\pi k,\ k\in Z;$

$x = \pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi k,\ k\in Z.$

Уравнения вида $a\sin x + b\cos x = c$

Вариант №1

1. $x = 2\operatorname{arctg}5+2\pi k,\ k\in Z.$

2. $x = 2\operatorname{arctg}\frac{1\pm\sqrt{2}}{3}+2\pi k,\ k\in Z.$

3. $x = -\frac{2}{3}\pi+2\pi k,\ k\in Z.$

Вариант №2

1. $x = \frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z;\ \ x = 2\operatorname{arctg}1{,}5+2\pi n,\ n\in Z.$

2. Нет решения. 3. $x = (-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k-\frac{\pi}{4},\ k\in Z.$

Вариант №3

1. $x = \pi(2n+1),\ n\in Z;\ \ x = 2\operatorname{arctg}\sqrt{7}+2\pi k,\ k\in Z.$

2. $x = (-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n+\frac{\pi}{4},\ n\in Z.$

3. $x = 2\operatorname{arctg}\frac{1\pm\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}+2\pi k,\ k\in Z.$

Вариант №4

1. $x=(-1)^n\frac{\pi}{18}+n\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{18}, n\in Z$. 2. Нет решения.

3. $x=\frac{\pi}{4}(8k+1), k\in Z$; $x=\frac{\pi}{20}(8k+3), k\in Z$.

Вариант №5

1. $x=2\operatorname{arctg}\frac{4\pm\sqrt{5}}{11}+2\pi k, k\in Z$.

2. $x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$.

3. $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{2}+2\pi n-\frac{\pi}{2}, n\in Z$.

Вариант №6

1. $x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n-\frac{\pi}{6}, n\in Z$.

2. $x=(-1)^n\frac{\pi}{8}+n\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}, n\in Z$.

3. $x=(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{7}}{7}+\pi n+\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}, n\in Z$.

Вариант №7

1. $x=\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$. 2. $x=\pi k, k\in Z$; $x=\frac{\pi}{4}(4n-1), n\in Z$.

3. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$; $x=-2\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+2\pi n, n\in Z$.

Уравнения смешанного типа

Вариант №1

1. $x=\frac{\pi}{4}(4k-1),\ k\in Z;\ x=(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{2}}{5}+(4n-1)\cdot\frac{3}{4},\ n\in Z.$

2. $x=-\frac{5}{6}\pi.$ 3. $x=\frac{\pi}{5}+2\pi k;\ \frac{\pi}{7}+\frac{2}{7}\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2};\ k,n,m\in Z.$

Вариант №2

1. $x=(-1)^k\frac{\pi}{4}+(4k+1)\frac{\pi}{4},\ k\in Z.$ 2. $x=\frac{\pi}{6}.$

3. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z;\ x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z.$

Вариант №3

1. $x=\frac{\pi}{3}.$ 2. $x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z;\ x=\operatorname{arctg}3+\pi n,\ n\in Z.$

3. $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{6},\ k\in Z;\ x=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi n,\ n\in Z.$

Вариант №4

1. $x=-\frac{7}{6}\pi.$ 2. $x=\pi+2\pi k,\ k\in Z;\ x=\pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi n,\ n\in Z.$

3. $x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z;\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z.$

Вариант №5

1. $\frac{\pi}{2};\ \pi;\ 2\pi;\ \frac{5\pi}{2}.$ 2. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$

3. $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z.$

Вариант №6

1. $-\frac{3}{4}\pi;\ -\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}.$

2. $x=\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z;\ \ x=\frac{\pi}{20}+\frac{\pi k}{10},\ k\in Z.$

3. $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z.$

Вариант №7

1. $x=2\pi k,\ k\in Z;\ \ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z.$

2. $\pm\frac{\pi}{2};\ \frac{2\pi}{11}k,\ \ k=0;\pm1;\pm2;\pm3.$

3. $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4},\ k\in Z.$

Вариант №8

1. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z.$

2. $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\pi k.$

Указание: использовать формулу $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$

3. $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z.$

Решение простейших тригонометрических неравенств

Вариант №1

1. $-\frac{4\pi}{3}+2\pi k<x<\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z.$

2. $\frac{\pi}{4}+2\pi k\le x\le\frac{7\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z.$

3. $\left(-\frac{5\pi}{6}+\pi k;-\frac{\pi}{6}+\pi k\right],\ k\in Z.$

Вариант №2

1. $\left[-\frac{3\pi}{8}+\pi k;-\frac{\pi}{8}+\pi k\right],\ k\in Z.$

2. $\left(\pi n;\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{3}\right)+\pi n\right],\ n\in Z.$ 3. $x\in R.$

Вариант №3

1. $\frac{\pi}{4}+\pi k<x<\frac{3\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z.$ 2. Нет решения.

3. $\left[-\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3};\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}\right].$

Вариант №4

1. $\frac{\pi}{6}+2\pi n<x<\frac{5}{6}\pi+2\pi n,\ k\in Z.$ 2. Нет решения.

3. $\left[\pi k;\frac{\pi}{4}+\pi k\right).$

Вариант №5

1. $\pi k-\frac{3\pi}{8}\le x\le-\frac{\pi}{8}+\pi k,\ k\in Z.$

2. $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{6}+\pi n\right],\ n\in Z.$

3. $-\frac{\pi}{6}+\pi n<x<\pi n,\ n\in Z.$

Вариант №6

1. $-\frac{17}{12}\pi+2\pi n\le x\le-\frac{\pi}{12}+2\pi n,\ n\in Z$

или $\left[-\frac{17}{12}\pi+2\pi n;-\frac{\pi}{12}+2\pi n\right].$

2. $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{\pi}{3}+\pi k\right),\ k\in Z.$

3. $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right),\ k\in Z.$

Вариант №7

1. $\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi k;\pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi k\right),\ k\in Z.$

2. $x\in\left(-\frac{3\pi}{2}+9\pi k;\frac{3\pi}{2}+9\pi k\right),\ k\in Z.$

3. $\left(\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2};\frac{3}{8}\pi+k\frac{\pi}{2}\right),\ k\in Z.$

Вариант № 8

1. $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{\pi}{6}+\pi n\right), n \in Z$.

2. $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \left[\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right]$.

3. $-\sin x-\cos x$.

Вариант № 9

1. Указание: выразить $\operatorname{tg} 2x$ через $\operatorname{tg} x$; $x \in\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n, \pi n\right)$;

$x \in\left(\frac{\pi}{4}+\pi n, \frac{\pi}{2}+\pi n\right), n \in Z$.

2. $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $[2\pi n; \pi+2\pi n]$, $n \in Z$.

3. $x_1=\frac{\pi}{6}$; $x_2=\frac{5\pi}{6}$; $x \in\left[-\frac{7\pi}{6}+2\pi k; \frac{\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k \in Z$.

Решение систем тригонометрических уравнений

Вариант № 1

1. $x=\pi k+\frac{\pi}{8} \pm \frac{\pi}{4}$; $y=-\pi k+\frac{\pi}{8} \mp \frac{\pi}{4}$.

2. $x=\frac{\pi}{6}(6n \pm 1)+\frac{\pi}{6}$; $y=(6n \pm 1)\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}$, $n \in Z$.

Вариант № 2

1. $x= \pm \arccos \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+2\pi n+\frac{\pi}{12}$;

$$y = \pm\arccos\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + 2\pi n - \frac{\pi}{12},\ n \in Z.$$

2. $x = \frac{\pi}{3}(3n+1);\ \ y = \frac{\pi}{6}(6n+1),\ n \in Z.$

Вариант №3

1. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n + \frac{\pi}{8};\ \ y = \mp\frac{\pi}{3} - 2\pi n + \frac{\pi}{8},\ n \in Z.$

2. $x = \frac{\pi}{3}(2+3n);\ \ y = \frac{\pi}{3}(2-3n),\ n \in Z.$

Вариант №4

1. $x = \frac{\pi}{6} + \pi n;\ \ y = \frac{\pi}{6} - \pi n,\ n \in Z.$

2. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k;\ \ y = \frac{\pi}{6} - \pi k,\ k \in Z;$

$x = \frac{\pi}{6} + \pi k;\ \ y = -\frac{\pi}{4} - \pi k,\ k \in Z.$

Содержание

Тригонометрические функции произвольного угла 3

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Основные тригонометрические формулы 9

Тригонометрические функции суммы, разности, двойного и половинного аргумента 15

Преобразование алгебраических сумм тригонометрических функций в произведение. Обратное преобразование 21

Тригонометрические суммы и их графики 27

Обратные тригонометрические функции 31

Тригонометрические уравнения. Уравнения вида: $\sin x = a$; $\cos x = a$; $\operatorname{tg} x = a$; $\operatorname{ctg} x = a$ 37

Уравнения, приводимые к алгебраическим 43

Уравнения, решаемые разложением на множители 47

Однородные уравнения 53

Уравнения, решаемые с помощью формул сложения тригонометрических функций 59

Уравнения, решаемые с помощью формул сложения углов и разложения произведения тригонометрических функций в сумму 63

Уравнения, решаемые с помощью формул понижения степени 69

Уравнения вида $a\sin x + b\cos x = c$ 75

Уравнения смешанного типа 79

Решение простейших тригонометрических неравенств 85

Решение систем тригонометрических уравнений 91

Ответы 93

Серия «Библиотечка учителя»

Алевтина Владимировна Макеева

Карточки по тригонометрии
10—11 классы

Дидактический материал для учителей

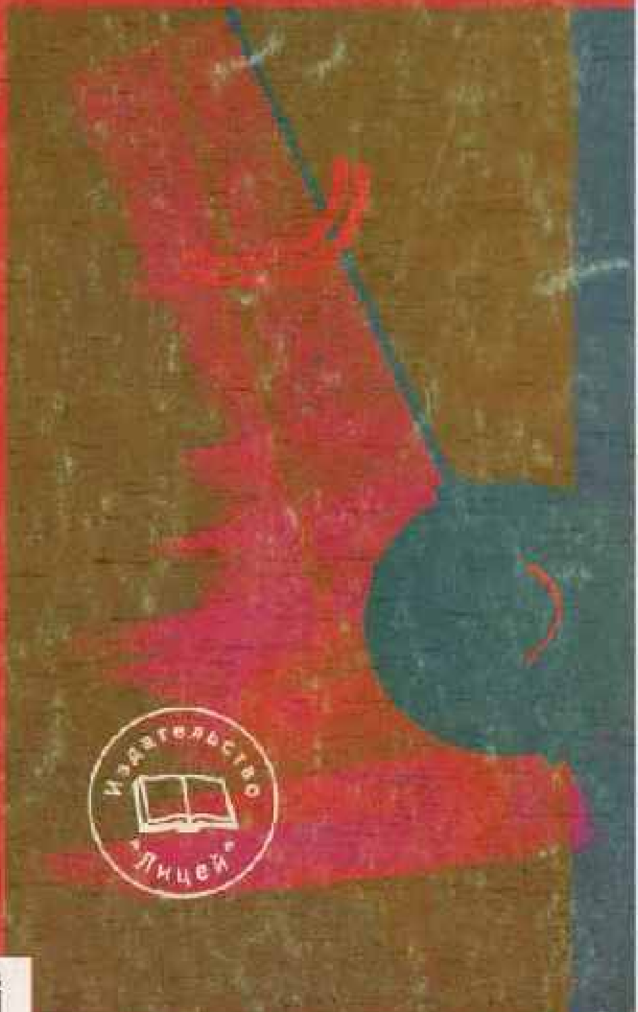
Гл. редактор *Э. Г. Донецкая*. Дизайн обложки *И. А. Плосконос*. Техн. редактор *С. В. Лихобаба*. Комп. верстка *А. А. Палин*. Корректор *О. С. Чумак*.

Диапозитивы предоставлены издательством.

Лицензия ИД № 01856 от 25.05.2000. Подписано в печать 22.05.2002. Формат 60×84 1/16. Гарнитура "Литературная". Бумага тип. № 2. Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,44. Тираж 8000 экз. Заказ № 1667.

ОАО «Издательство «Лицей»
Тел./факс: (845-2) 27-22-36

Государственное унитарное предприятие ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.



ISBN 5-8053-0156-3
9 785805 301569