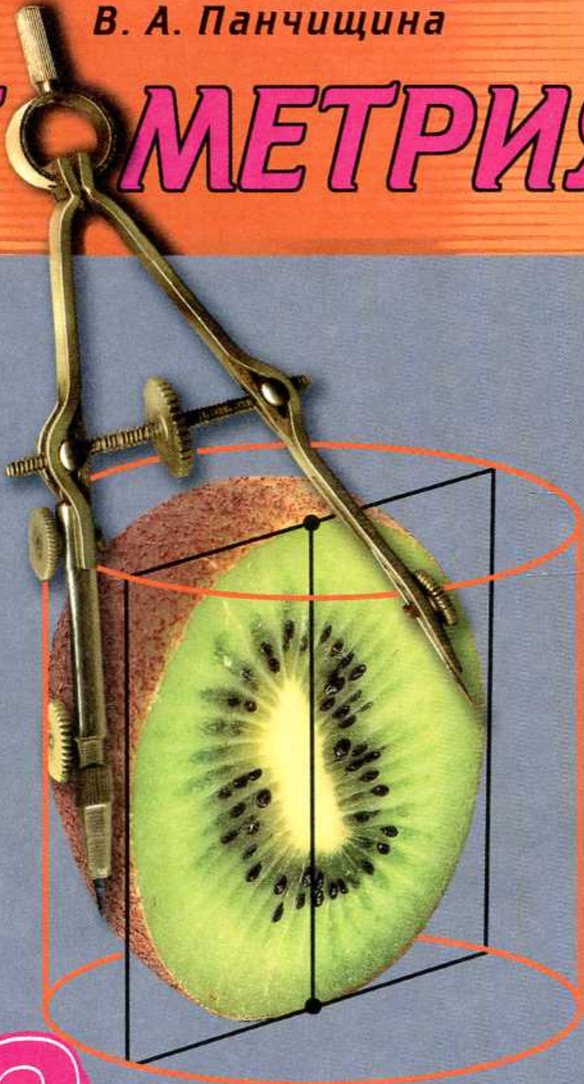
В. А. Панчищина

ГЕОМЕТРИЯ



10

Дидактические материалы

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

В. А. Панчищина

ГЕОМЕТРИЯ

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

10 класс

Пособие
для общеобразовательных
организаций

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
2014

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
П16

12+

Панчищина В. А.
П16 Геометрия. Дидактические материалы. 10 класс : пособие для общеобразоват. организаций / В. А. Панчищина. — М. : Просвещение, 2014. — 64 с. — ISBN 978-5-09-030659-1.

Пособие содержит самостоятельные и контрольные работы по курсу геометрии 10 класса в четырёх вариантах. Оно ориентировано на учебник А. В. Погорелова «Геометрия. 10—11 классы». Задания, рассматриваемые в данном пособии, могут быть использованы как для текущего контроля и итогового повторения, так и при подготовке учащихся к ЕГЭ по математике.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72

ISBN 978-5-09-030659-1

Предисловие

Пособие предназначено учителям математики, преподающим геометрию в старших классах по учебнику А. В. Погорелова «Геометрия. 10—11 классы».

Данное пособие содержит 14 самостоятельных работ и 4 контрольные работы, каждая из которых включает четыре варианта, примерно одинаковых по уровню сложности. Почти во всех самостоятельных работах есть одно дополнительное задание, которое несколько сложнее основных заданий. В конце пособия приведены ответы почти ко всем заданиям из данных работ.

В следующей таблице представлено распределение самостоятельных и контрольных работ по пунктам учебника.

Пункты учебника	Номер работы	Содержание материала
§ 1. Аксиомы стереометрии и их простейшие следствия		
1, 2, 5	С — 1	Аксиомы стереометрии. Существование плоскости, проходящей через данную прямую и данную точку. Замечание к аксиоме I
3, 4	С — 2	Пересечение прямой с плоскостью. Существование плоскости, проходящей через три данные точки
§ 2. Параллельность прямых и плоскостей		
7, 8	С — 3	Параллельные прямые в пространстве. Признак параллельности прямых
	К — 1	Контрольная работа № 1
9	С — 4	Признак параллельности прямой и плоскости
10—12	С — 5	Признак параллельности плоскостей. Существование плоскости, параллельной данной плоскости. Свойства параллельных плоскостей

Пункты учебника	Номер работы	Содержание материала
13	С — 6	Изображение пространственных фигур на плоскости
	К — 2	Контрольная работа № 2
§ 3. Перпендикулярность прямых и плоскостей		
14, 15	С — 7	Перпендикулярность прямых в пространстве. Признак перпендикулярности прямой и плоскости
16, 17	С — 8	Построение перпендикулярных прямой и плоскости. Свойства перпендикулярных прямой и плоскости
18—20	С — 9	Перпендикуляр и наклонная. Теорема о трёх перпендикулярах. Признак перпендикулярности плоскостей
	К — 3	Контрольная работа № 3
§ 4. Декартовы координаты и векторы в пространстве		
23	С — 10	Введение декартовых координат в пространстве
24—26	С — 11	Расстояние между точками. Координаты середины отрезка. Преобразование симметрии в пространстве
31—33	С — 12	Угол между скрещивающимися прямыми. Угол между прямой и плоскостью. Угол между плоскостями
35, 36	С — 13	Векторы в пространстве. Действия над векторами в пространстве

Пункты учебника	Номер работы	Содержание материала
36, 37	С — 14	Разложение вектора по трём некомпланарным векторам
	К — 4	Контрольная работа № 4

На выполнение каждой самостоятельной работы потребуется приблизительно 15—20 минут. Предполагается, что за это время одни обучающиеся могут выполнить только основные задания, а другие — и основные задания, и дополнительное.

При работе с данными учебными материалами необходимо предоставить обучающимся возможность выбора уровня сложности заданий. И тогда если ведётся оценка знаний по пятибалльной шкале, то основные задания следует рассматривать как одну работу, за которую можно поставить от 1 до 5 баллов включительно. Статистику по дополнительным заданиям лучше вести отдельно и оценивать их также в диапазоне от 1 до 5 баллов. С другой стороны, можно вести оценку каждого задания отдельно, определяя баллы по возрастанию в соответствии с номером задания.

Данное учебное пособие позволяет учителю (по своему усмотрению) и обучающемуся (по желанию) выбирать уровень контроля: мягкий или жёсткий. Если выбран жёсткий контроль, то учитель предоставляет обучающемуся только текст самостоятельной работы, а затем проверяет выполненную работу и сообщает результаты. Если же выбран мягкий контроль, то учитель может дать возможность обучающемуся корректировать свои действия в процессе выполнения задания, предоставив ему материалы для самоконтроля — карточку с чертежом и ответом к каждому заданию работы. Безусловно, эту поддержку необходимо учитывать при оценивании работы.

Учебные задания, рассматриваемые в данном пособии, могут быть использованы как для текущего контроля и итогового повторения, так и при подготовке обучающихся к ЕГЭ по математике.

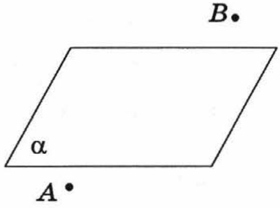
Материалы данного пособия можно разделить на варианты самостоятельных работ и разрезные карточки с контрольными работами, а можно использовать для каждого обучающегося отдельную книгу.

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Вариант 1

С — 1

1. Рассмотрите предложенный рисунок и символьную запись к нему. Подумайте, каким из аксиом или теорем стереометрии они могут соответствовать.
Выполните этот рисунок и запись в тетради и дополните их так, чтобы получилась иллюстрация и краткая запись одной из аксиом или теорем стереометрии, приведённых в следующем списке:



$A \notin \alpha, B \notin \alpha$

1. Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей. Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

$С_1$. Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.

$С_2$. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

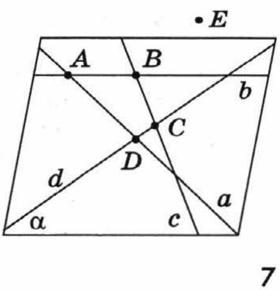
$С_3$. Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.

Т1.1. Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.

Укажите, какое утверждение имеется в виду.

2. Прямые a, b, c, d плоскости α попарно пересекаются в точках A, B, C, D:
$a \cap b = A$, $b \cap c = B$, $c \cap d = C$, $d \cap a = D$.

Точка E не принадлежит плоскости α. Выполнив чертёж, покажите на нём и запишите все плоскости, отличные от плоскости α, которые содержат точку B и определяются прямыми, проходящими через какие-либо две из данных точек A, B, C, D, E.



3. (***Дополнительное задание.***) В пространстве заданы три фигуры: две пересекающиеся прямые a и b и не принадлежащая им точка M. Укажите, сколько всего — две или три — различных плоскостей, каждая из которых содержит любые две фигуры из трёх данных, не может существовать в пространстве.

Прокомментируйте свой выбор. Для этого:

а) в списке некоторых аксиом и теорем стереометрии из задания 1 выберите утверждения, которые использованы при решении данной задачи;

б) запишите, в каком порядке используются эти утверждения.

С — 2

1. Даны точка A, две различные плоскости α и β, имеющие общую точку M, отличную от точки A, и плоскость γ, отличная от плоскостей α и β, содержащая какие-нибудь две точки, принадлежащие как плоскости α, так и плоскости β. Определите, какой плоскости — α, β или γ — принадлежит середина E отрезка AM, если:

а) $A \in \alpha$, $A \notin \beta$; в) $A \notin \alpha$, $A \in \beta$;
б) $A \in \alpha$, $A \in \beta$; г) $A \notin \alpha$, $A \notin \beta$.

В каждом случае изобразите плоскости на чертеже и покажите точки A и E.

Выберите одно или несколько заданий а) — г) и выполните их.

2. Даны два треугольника ABC и ABD, не лежащие в одной плоскости. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC, X — середина отрезка AC, Y — любая точка отрезка BD. Докажите, что отрезок ZM, где Z — любая точка отрезка XY, принадлежит плоскости, содержащей прямую BD и точку X.

3. (***Дополнительное задание.***) Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости, точки E и F являются точками пересечения медиан треугольников ABC и BDC соответственно. Выясните, лежит ли прямая EF в какой-либо плоскости, проходящей через три из данных точек A, B, C, D.

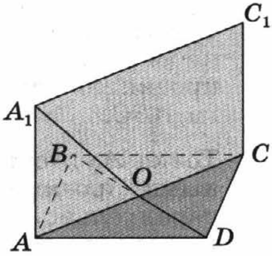
С — 3

1. Даны два треугольника ABC и DBC, не лежащие в одной плоскости. Точки E, F, G являются серединами сторон BC, AB, DB соответственно. Установите взаимное расположение прямых:
   а) DE и CG; б) DE и CF; в) EF и AC.

2. В плоскости α заданы параллельные прямые a, b и прямая c, пересекающая прямую b в точке A. Имеют ли общие точки плоскость β, содержащая прямую c и точку B, не принадлежащую плоскости α, и плоскость γ, проходящая через точку A и прямую d, проведённую через точку B параллельно прямой a? Если имеют, то покажите их на чертеже. Объясните свой ответ.

3. (***Дополнительное задание.***) Даны два треугольника ABC и DBC, не лежащие в одной плоскости. Точки E, F, G являются серединами отрезков AC, BC, DB соответственно. Точка H делит отрезок BC в отношении $1 : 3$, считая от вершины B. Установите взаимное расположение прямых:
   а) AH и EF; б) AH и GF. Объясните свой ответ.

С — 4



1. Даны два параллелограмма $ABCD$ и ACC_1A_1, расположенные в разных плоскостях. Установите взаимное расположение:
   а) прямой C_1A_1 и плоскости (BCD);
   б) прямых C_1A_1 и BD;
   в) прямых A_1O и CC_1, где O — середина отрезка BD.

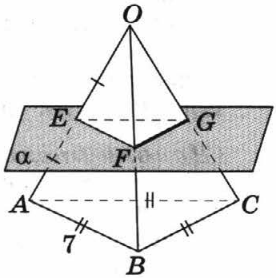
2. Параллелограммы $ABCD$ и $BCEF$ не лежат в одной плоскости. Через точку A проведена прямая l, параллельная прямой CE. Докажите, что прямые l и EG, где G — середина отрезка CD, не имеют общих точек.

3. (***Дополнительное задание.***) Даны три прямые a, b, c, причём прямая b пересекает прямую a в точке A, а прямую c — в точке B, прямые a и c не пересекаются. Через точку A проведена прямая m, параллельная прямой c, а через точку B — прямая l, параллельная прямой a. Определите, пересекаются ли прямые m и l. Объясните свой ответ.

С — 5

1. Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Через вершину D ломаной $ABCD$ проведена плоскость α, параллельная плоскости (ABC). Добавьте к ломаной $ABCD$ ещё одно звено DE, лежащее в плоскости α. Установите, как звено DE может располагаться относительно прямой BC, и изобразите его на чертеже.

2. Даны четыре точки O, A, B, C, не лежащие в одной плоскости. Через точку E — середину отрезка OA — проведена плоскость α, параллельная плоскости (ABC) и пересекающая отрезки OB, OC соответственно в точках F и G. Найдите длину отрезка FG, если известно, что треугольник ABC равносторонний со стороной 7 см.



С — 6

1. Треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 1) является параллельной проекцией треугольника ABC. Постройте точку M_1 — проекцию точки M пересечения медиан треугольника ABC.

2. Точка A_1 и отрезок D_1E_1 (рис. 2) являются параллельными проекциями вершины A и средней линии DE, параллельной стороне AC треугольника ABC. Постройте параллельную проекцию треугольника ABC.

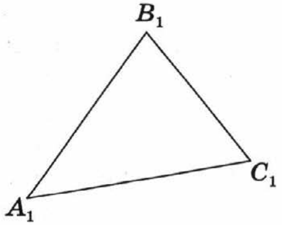


Рис. 1

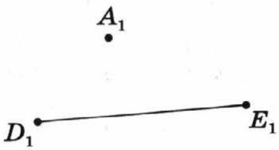
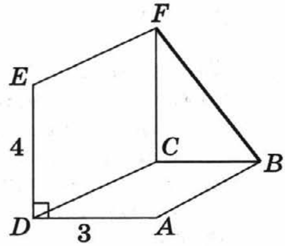


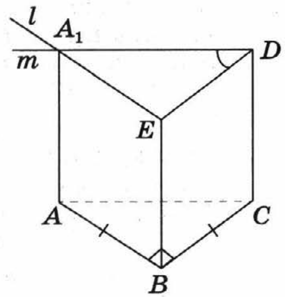
Рис. 2

С — 7

1. Два параллелограмма $ABCD$ и $CDEF$, лежащие в разных плоскостях, расположены так, что угол ADE равен 90°. Найдите длину отрезка BF, если $AD = 3$ см, $DE = 4$ см.



2. Равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B и параллелограмм $BCDE$ расположены в разных плоскостях α и β. Через точку D проведена плоскость γ, параллельная плоскости (ABC) и пересекающая плоскость (ACD) по прямой m, а плоскость (ABE) по прямой l. Найдите угол A_1DE, который определяется прямыми l и m, пересекающимися в точке A_1.

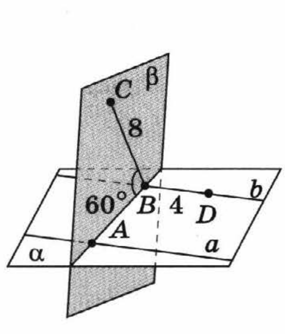


3. (***Дополнительное задание.***) Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Сравните расстояния BD и AD, если все звенья ломаной $ABCD$ равны 3 см, угол ABC прямой, а прямая CD перпендикулярна плоскости (ABC).

С — 8

1. В плоскости α даны прямые a и b, не имеющие общих точек. Через точку A прямой a проведена плоскость β перпендикулярно этой прямой. Определите, принадлежит ли плоскости β середина отрезка AB, если точка B лежит на прямой b. Если принадлежит, то изобразите её на чертеже.

2. В плоскости α даны прямые a и b, не имеющие общих точек. Через точку A прямой a перпендикулярно этой прямой проведена плоскость β, которая пересекает прямую b в точке B. В плоскости β и на прямой b соответственно выбраны точки C и D так, что $BC = 8$ см, $BD = 4$ см. Найдите длины отрезков AC, AD, CD, если $\angle ABC = 60°$, $AB = 3$ см.



С — 9

1. Через центр O окружности, описанной около правильного треугольника ABC, проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника (рис. 1). На этой прямой выбрана точка M так, что $OM = 8$ см. Найдите расстояние от точки M до вершин треугольника ABC, если медиана AE треугольника ABC равна 18 см.

2. В плоскости α дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, причём $AB = BC$ (рис. 2). Точка M расположена вне плоскости α так, что $MA = MC$ и $\angle MOB = 90°$, где O — середина отрезка AC.

   а) Докажите, что плоскости (BMO) и (AMC) перпендикулярны.

   б) Через точку K — середину отрезка OM проведена плоскость β перпендикулярно прямой OM. Определите, имеет ли плоскость β общие точки с плоскостью (OMC). Если имеет, то изобразите их на чертеже.

   в) Найдите стороны треугольника ABC, если $KF = 3$ см, где F — точка пересечения плоскости β и прямой BM.

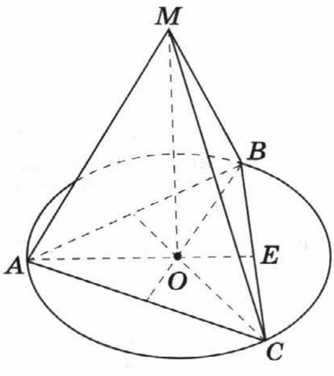


Рис. 1

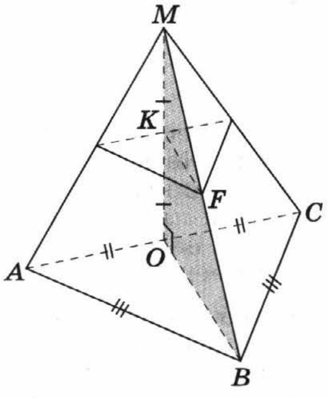


Рис. 2

С — 10

В пространстве заданы точки:

$A\ (3;\ 1;\ 1)$, $B\ (3;\ 6;\ 1)$, $C\ (5;\ 4;\ 1)$, $D\ (7;\ 6;\ 1)$,
$E\ (7;\ 1;\ 1)$, $F\ (8;\ 6;\ 1)$, $G\ (8;\ 1;\ 1)$, $H\ (11;\ 6;\ 1)$,
$K\ (11;\ 1;\ 1)$, $L\ (12;\ 1;\ 1)$, $M\ (12;\ 6;\ 1)$,
$N\ (15;\ 6;\ 1)$, $O\ (15;\ 3;\ 1)$, $P\ (12;\ 3;\ 1)$.

а) Рассмотрите внимательно координаты данных точек. Какую особенность вы заметили? Опишите её, используя буквы x, y, z для координат точки пространства.

б) Мысленно спроектируйте данные точки на координатные плоскости xy, xz, yz. Только на одной из координатных плоскостей можно получить буквы русского алфавита, если последовательно соединить отрезками проекции данных точек. Укажите эту плоскость, постройте в ней проекции, изобразите ломаные, вершинами которых являются проекции, и прочитайте слово.

в) (***Дополнительное задание.***) Измените в этом слове последнюю букву так, чтобы получилось новое слово. Запишите координаты вершин ломаной, с помощью которой можно изобразить эту букву на координатной плоскости.

С — 11

1. В плоскости xy дан параллелограмм $ABCD$, угол A которого равен $30°$. Найдите площадь этого параллелограмма, если известно, что приблизительно $A\ (-4;\ -2;\ 0)$, $B\ (4;\ 2;\ 0)$, $C\ (8;\ 8;\ 0)$, $D\ (0;\ 4;\ 0)$.

2. Запишите координаты точки C', симметричной точке C — середине отрезка AB относительно начала координат, если $A\ (1;\ 3;\ 5)$, $B\ (-3;\ 1;\ 3)$.

3. (***Дополнительное задание.***) Установите, как расположены точки A и B относительно координатных осей, если точка $C\ (0;\ 0;\ 1)$ является серединой отрезка AB.

С — 12

Квадраты $ABCD$ и $ADEF$ расположены в разных плоскостях α и β, прямая DE перпендикулярна прямой CD, точка O — центр квадрата $ABCD$, точки K и L — середины сторон CD и CB соответственно. Найдите углы:

а) между прямыми KL и OF;

б) между прямой KL и плоскостью (ACF);

в) между плоскостями (ACF) и (KLO);

г) (***Дополнительное задание.***) между прямыми KL и DF.

С — 13

1. Дан параллелограмм $ABCD$ и точка B', не принадлежащая плоскости этого параллелограмма. Найдите координаты вектора $\overline{B'D}$, если известно, что $A\ (1;\ -1;\ 2)$, $B\ (2;\ 0;\ 3)$, $C\ (1;\ -3;\ 2)$, $B'\ (1;\ 3;\ 1)$.

2. Треугольник ABC и параллелограмм $ACDE$ с центром в точке O расположены в разных плоскостях α и β, точки F, G, H — середины сторон AC, ED и CD соответственно. Назовите и изобразите на чертеже векторы:

   а) $\overline{m} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$; б) $\overline{n} = \frac{1}{2}\overline{AD} + \overline{DH}$;

   в) $\overline{p} = \frac{1}{2}\left(\overline{AE} + \overline{AC}\right)$.

С — 14

1. Даны четыре точки $A\ (-3;\ 1;\ 3)$, $B\ (4;\ 1;\ 4)$, $C\ (5;\ 1;\ -3)$, $D\ (-2;\ 1;\ -4)$. Найдите площадь четырёхугольника $KLMN$, вершины которого совпадают с серединами отрезков AB, BC, CD, DA соответственно.

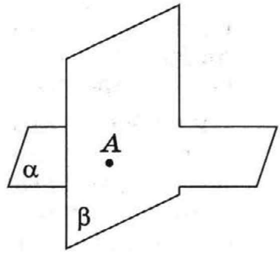
2. Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Точки K, L, M, N — середины отрезков AB, BC, CD, DB соответственно. Пусть $\overline{a} = \overline{KL}$, $\overline{b} = \overline{LM}$, $\overline{c} = \overline{MN}$. Выразите векторы $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{KB}$ через векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.

Вариант 2

С — 1

1. Рассмотрите предложенный рисунок и символьную запись к нему. Подумайте, каким из аксиом или теорем стереометрии они могут соответствовать.

Выполните этот рисунок и запись в тетради и дополните их так, чтобы получилась иллюстрация и краткая запись одной из аксиом или теорем стереометрии, приведённых в следующем списке:



$A \in \alpha, A \in \beta$

1. Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей. Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

$С_1$. Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.

$С_2$. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

$С_3$. Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.

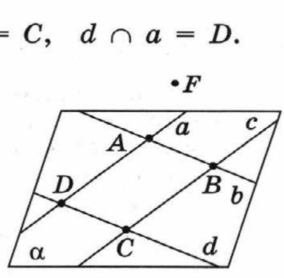
Т1.1. Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.

Укажите, какое утверждение имеется в виду.

2. Прямые a, b, c, d плоскости α попарно пересекаются в точках A, B, C, D:

$$a \cap b = A,\quad b \cap c = B,\quad c \cap d = C,\quad d \cap a = D.$$

Точка F не принадлежит плоскости α. Выполнив чертёж, покажите на нём и запишите все плоскости, отличные от плоскости α, которые содержат точку D и определяются прямыми, проходящими через какие-либо две из данных точек A, B, C, D, F.



3. (***Дополнительное задание.***) В пространстве заданы три фигуры: две прямые a и b, не принадлежащие одной плоскости, и точка M, не лежащая ни на одной из них. Укажите, сколько всего — одна, две или три — различных плоскостей, каждая из которых содержит любые две фигуры из трёх данных, может существовать в пространстве.

Прокомментируйте свой выбор. Для этого:

а) в списке некоторых аксиом и теорем стереометрии из задания 1 выберите утверждения, которые использованы при решении данной задачи;

б) запишите, в каком порядке используются эти утверждения.

С — 2

1. Даны точка A, две различные плоскости α и β, имеющие общую точку M, отличную от точки A, и плоскость γ, отличная от плоскостей α и β, содержащая какие-нибудь две точки, принадлежащие как плоскости α, так и плоскости β. Определите, какой плоскости — α, β или γ — принадлежит середина E отрезка AM, если:

а) $A \in \alpha$, $A \notin \beta$; в) $A \notin \alpha$, $A \in \beta$;

б) $A \in \alpha$, $A \in \beta$; г) $A \notin \alpha$, $A \notin \beta$.

В каждом случае изобразите плоскости на чертеже и покажите точки A и E.

Выберите одно или несколько заданий а) — г) и выполните их.

2. Даны параллелограмм $ABDE$ с центром в точке O и треугольник ABC, не лежащие в одной плоскости. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC, X — середина отрезка AB, Y — любая точка отрезка OC. Докажите, что прямая CO и отрезок ZM, где Z — любая точка отрезка XY, принадлежат одной и той же плоскости.

3. (***Дополнительное задание.***) Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости, точки G и H являются точками пересечения медиан треугольников ABD и ADC соответственно. Выясните, лежит ли прямая GH в какой-либо плоскости, проходящей через три из данных точек A, B, C, D.

С — 3

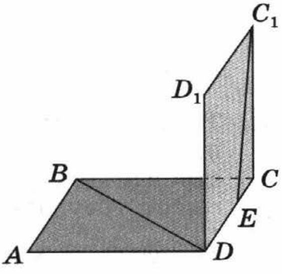
1. Даны два треугольника ABC и ADB, не лежащие в одной плоскости. Точки E, F, G являются серединами сторон BC, AB, DB соответственно. Установите взаимное расположение следующих прямых:
а) DF и AG; б) DF и AE; в) AC и FE.

2. На параллельных прямых a и b в плоскости α взяты соответственно точки M и N. Точка F не принадлежит плоскости α. Выясните, имеют ли общие точки плоскость (MNF) и плоскость β, содержащая прямую b и прямую c, которая параллельна прямой a и проходит через точку F. Если имеют, то покажите их на чертеже. Объясните свой ответ.

3. (***Дополнительное задание.***) Даны два треугольника ABD и ADC, не лежащие в одной плоскости. Точки K, M, N являются серединами отрезков DB, AD, AC соответственно. Точка L делит отрезок AD в отношении $2 : 1$, считая от вершины D. Установите взаимное расположение прямых:
а) BL и MK; б) BL и MN. Объясните свой ответ.

С — 4

1. Даны два параллелограмма $ABCD$ и DCC_1D_1, расположенные в разных плоскостях. Установите взаимное расположение:
а) прямой C_1D_1 и плоскости (BCD);
б) прямых C_1D_1 и BD;
в) прямых C_1E и DD_1, где E — точка на ребре CD, такая, что $DE : EC = 3 : 1$.



$DE : EC = 3 : 1$

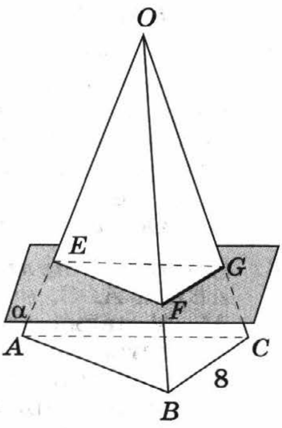
2. Параллелограммы $ABCD$ и $ADEF$ расположены в разных плоскостях. Через точку C проведена прямая l, параллельная прямой AF. Докажите, что прямые l и FG, где G — середина отрезка AB, не имеют общих точек.

3. (***Дополнительное задание.***) Даны три прямые a, b, c, причём прямые a и b параллельны, прямая c пересекает прямую a в точке A и не пересекает прямую b. Через точку B на прямой b проведена прямая l, параллельная прямой c. Определите, пересекаются ли прямые a и l. Объясните свой ответ.

С — 5

1. Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Через вершину C ломаной $ADBC$ проведена плоскость α, параллельная плоскости (ADB). Добавьте к ломаной $ADBC$ ещё одно звено CE, лежащее в плоскости α. Установите, как звено CE может располагаться относительно прямой AD, и изобразите его на чертеже.

2. Даны четыре точки O, A, B, C, не лежащие в одной плоскости. Точка E делит отрезок OA в отношении $1 : 3$, считая от точки A. Через точку E проведена плоскость α, параллельная плоскости (ABC) и пересекающая отрезки OB и OC соответственно в точках F и G. Найдите длину отрезка FG, если $BC = 8$ см.



$AE : EO = 1 : 3$

С — 6

1. Треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 1) является параллельной проекцией равностороннего треугольника ABC. Постройте точку M_1 — проекцию точки M пересечения высот треугольника ABC.

2. Точка C_1 и отрезок F_1G_1 (рис. 2) являются параллельными проекциями вершины C и средней линии FG, параллельной стороне AB треугольника ABC. Постройте параллельную проекцию треугольника ABC.

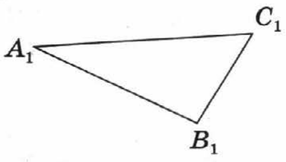


Рис. 1

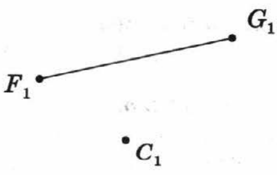
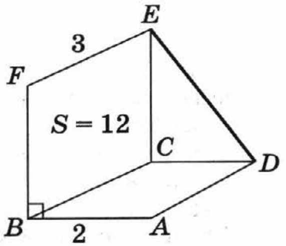


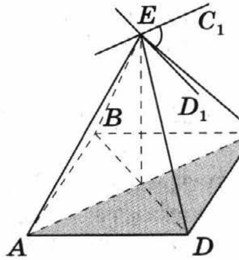
Рис. 2

С — 7

1. Два прямоугольника $ABCD$ и $BCEF$, лежащие в разных плоскостях, расположены так, что угол ABF равен $90°$. Найдите длину отрезка DE, если $AB = 2$ см, $EF = 3$ см, а площадь прямоугольника $BCEF$ равна 12 см^2.



2. Треугольник ACE и квадрат $ABCD$ расположены в разных плоскостях α и β. Через точку E проведена плоскость γ, параллельная плоскости (ABC), которая пересекает плоскость (ACE) по прямой C_1E, а плоскость (DBE) по прямой D_1E. Найдите угол C_1ED_1.

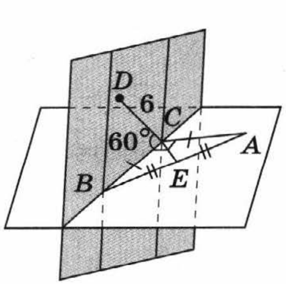


3. (***Дополнительное задание.***) Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Сравните расстояния BD и AD, если все звенья ломаной $ABCD$ равны 4 см, угол BCD прямой, а прямая AB перпендикулярна плоскости (BCD).

С — 8

1. Через точки A и B плоскости α проведены прямые a и b перпендикулярно этой плоскости. Через точку E — середину отрезка AB проведена плоскость β перпендикулярно прямой AB. Определите, имеют ли общие точки плоскость β и плоскость γ, проходящая через точку E и прямую b. Если имеют, то изобразите их на чертеже.

2. Через вершину C равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C проведена плоскость β, перпендикулярная прямой AC. В плоскости β выбрана точка D так, что $CD = 6$ см. Найдите длины отрезков AB, AD, BD, если медиана CE треугольника ABC равна $\sqrt{2}$ см и $\angle BCD = 60°$.



$CE = \sqrt{2}$

С — 9

1. Через центр O окружности, описанной около правильного треугольника ABC, проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника (рис. 1), и на этой прямой выбрана точка M. Найдите расстояние от точки M до вершин треугольника ABC, если радиус данной окружности равен 6 см, а точка M удалена от стороны BC на расстояние 15 см.

2. В плоскости α дан квадрат $ABCD$ с центром в точке O (рис. 2). Точка M расположена вне плоскости α так, что прямая OM перпендикулярна плоскости α.

а) Докажите, что плоскости (AMC) и (DMB) перпендикулярны.

б) Через точку K — середину отрезка OM проведена плоскость β перпендикулярно прямой OM. Определите, имеет ли плоскость β общие точки с плоскостями (BMO) и (CMO). Если имеет, то изобразите их на чертеже.

в) Найдите стороны данного квадрата, если $KF = 2$ см, где F — точка пересечения плоскости β и прямой DM.

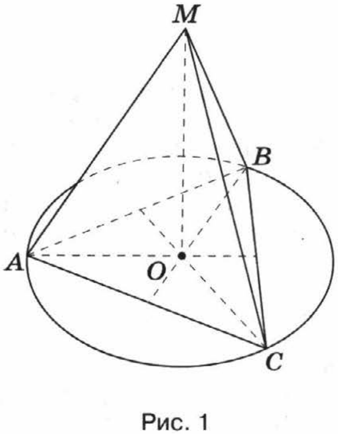


Рис. 1

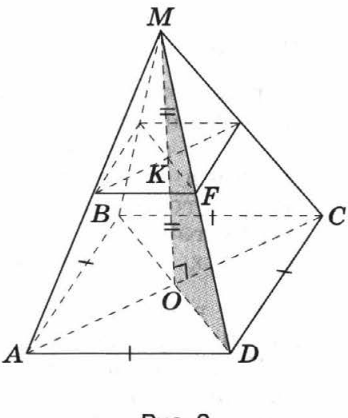


Рис. 2

С — 10

В пространстве заданы точки:

A (−7; 1; 3), B (−7; 6; 3), C (−5; 4; 3), D (−3; 6; 3), E (−3; 1; 3), F (−2; 6; 3), G (−2; 1; 3), H (1; 6; 3), K (1; 1; 3), L (2; 1; 3), M (2; 6; 3), N (5; 6; 3), O (5; 3; 3), P (2; 3; 3).

а) Рассмотрите внимательно координаты данных точек. Какую особенность вы заметили? Опишите её, используя буквы x, y, z для координат точки пространства.

б) Мысленно спроектируйте данные точки на координатные плоскости xy, xz, yz. Только на одной из координатных плоскостей можно получить буквы русского алфавита, если последовательно соединить отрезками проекции данных точек. Укажите эту плоскость, постройте в ней проекции, изобразите ломаные, вершинами которых являются проекции, и прочитайте слово.

в) (***Дополнительное задание.***) Измените в этом слове последнюю букву так, чтобы получилось новое слово. Запишите координаты вершин ломаной, с помощью которой можно изобразить эту букву на координатной плоскости.

С — 11

1. В плоскости xy дана трапеция $ABCD$, угол A которой равен 30°. Найдите площадь этой трапеции, если известно, что приблизительно A (−6; −5; 0), B (−2; 1; 0), C (4; 4; 0), D (8; 2; 0).

2. Запишите координаты точки C', симметричной точке C — середине отрезка AB относительно начала координат, если A (−1; 4; 3), B (−3; −2; 1).

3. (***Дополнительное задание.***) Установите, как расположены точки A и B относительно координатных осей, если точка C (−1; 0; 0) является серединой отрезка AB.

С — 12

Квадраты $ABCD$ и $ABEF$ расположены в разных плоскостях α и β, при этом прямая BE перпендикулярна прямой BC, точки K и L — середины сторон EF и CD соответственно. Найдите углы:

а) между прямой KL и плоскостью (ABC);

б) между прямыми KL и AB;

в) между плоскостями (ABC) и (AKF);

г) (***Дополнительное задание.***) между прямой KL и плоскостью (BCE).

С — 13

1. Дан параллелограмм $ABCD$ и точка B', не принадлежащая плоскости этого параллелограмма. Найдите координаты вектора $\overline{p} = \overline{B'A} + \overline{DA}$, если известно, что $A\ (2;\ -3;\ 1)$, $B\ (1;\ 1;\ -1)$, $C\ (0;\ -1;\ 1)$, $B'\ (3;\ 2;\ 1)$.

2. Треугольник ABC и параллелограмм $ACDE$ с центром в точке O расположены в разных плоскостях α и β, точки F, G, H — середины сторон AC, ED и CD соответственно. Назовите и изобразите на чертеже векторы:

а) $\overline{m} = \overline{AE} + \overline{BC} + \overline{CA}$; б) $\overline{n} = \frac{1}{2}\overline{CE} + \overline{GD}$;

в) $\overline{p} = \frac{1}{2}\left(\overline{DE} + \overline{DC}\right)$.

С — 14

1. Даны четыре точки $A\ (-7;\ 1;\ 3)$, $B\ (3;\ 5;\ 3)$, $C\ (5;\ 0;\ 3)$, $D\ (-5;\ -4;\ 3)$. Найдите площадь четырёхугольника $KLMN$, вершины которого совпадают с серединами отрезков AB, BC, CD, DA соответственно.

2. Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Точки E, F, G, H — середины отрезков AB, AC, CD, AD соответственно. Пусть $\overline{a} = \overline{FE}$, $\overline{b} = \overline{FG}$, $\overline{c} = \overline{GH}$. Выразите векторы $\overline{AD}$, $\overline{DC}$, $\overline{BE}$ через векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.

Вариант 3

С — 1

1. Рассмотрите предложенный рисунок и символьную запись к нему. Подумайте, каким из аксиом или теорем стереометрии они могут соответствовать. Выполните этот рисунок и запись в тетради и дополните их так, чтобы получилась иллюстрация и краткая запись одной из аксиом или теорем стереометрии, приведённых в следующем списке:

$A \in a, A \in b$

1. Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей. Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

$С_1$. Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.

$С_2$. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

$С_3$. Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.

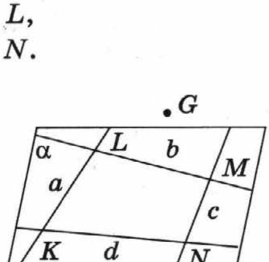
Т1.1. Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.

Укажите, какое утверждение имеется в виду.

2. Прямые a, b, c, d плоскости α попарно пересекаются в точках K, L, M, N:

$$a \cap d = K,\ a \cap b = L,$$
$$b \cap c = M,\ c \cap d = N.$$

Точка G не принадлежит плоскости α. Выполнив чертёж, покажите на нём и запишите все плоскости, отличные от плоскости α, которые содержат точку L и определяются прямыми, проходящими через какие-либо две из данных точек K, L, M, N, G.



3. (***Дополнительное задание.***) В пространстве заданы три фигуры: две прямые a и b и не принадлежащая им точка M. Верно ли, что в пространстве может существовать всего три различные плоскости, каждая из которых содержит любые две фигуры из трёх данных?

Прокомментируйте свой ответ. Для этого:

а) в списке некоторых аксиом и теорем стереометрии из задания 1 выберите утверждения, которые использованы при решении данной задачи;

б) запишите, в каком порядке используются эти утверждения.

С — 2

1. Даны точка A, две различные плоскости α и β, имеющие общую точку M, отличную от точки A, и плоскость γ, отличная от плоскостей α и β, содержащая какие-нибудь две точки, принадлежащие как плоскости α, так и плоскости β. Определите, какой плоскости — α, β или γ — принадлежит середина E отрезка AM, если:

а) $A \in \alpha$, $A \notin \beta$; в) $A \notin \alpha$, $A \in \beta$;
б) $A \in \alpha$, $A \in \beta$; г) $A \notin \alpha$, $A \notin \beta$.

В каждом случае изобразите плоскости на чертеже и покажите точки A и E.

Выберите одно или несколько заданий а) — г) и выполните их.

2. Даны параллелограмм $ABCD$ с центром в точке O и треугольник ACE, не лежащие в одной плоскости. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ADC, X — любая точка отрезка EO, Y — любая точка отрезка BX. Докажите, что прямая DE и отрезок MY принадлежат одной и той же плоскости.

3. (***Дополнительное задание.***) Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости, точки K и L являются точками пересечения медиан треугольников ADC и BDC соответственно. Выясните, лежит ли прямая KL в какой-либо плоскости, проходящей через три из данных точек A, B, C, D.

С — 3

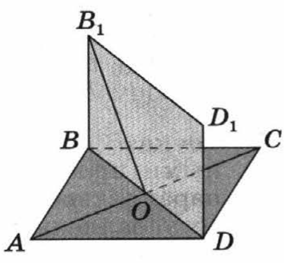
1. Даны два треугольника ABC и ADC, не лежащие в одной плоскости. Точки K, L, M являются серединами сторон DC, AD, BC соответственно. Установите взаимное расположение прямых:
а) BK и DM; б) BK и CL; в) AC и KL.

2. В плоскости α на параллельных прямых a и b даны соответственно точки A и D, точка F лежит вне плоскости α. Через точку D параллельно прямой AF проведена прямая c. Имеет ли общие точки плоскость β, содержащая точку F и прямую c, с плоскостью γ, которая содержит прямую a и прямую d, проходящую через точку F параллельно прямой b? Если имеют, то покажите их на чертеже. Объясните свой ответ.

3. (***Дополнительное задание.***) Даны два треугольника ABD и DBC, не лежащие в одной плоскости. Точки E, F, G являются серединами отрезков AB, BD, CD соответственно. Точка H делит отрезок BD в отношении $1 : 5$, считая от вершины B. Установите взаимное расположение прямых:
а) GF и CH; б) CH и EF. Объясните свой ответ.

С — 4

1. Даны два параллелограмма $ABCD$ и BDD_1B_1, расположенные в разных плоскостях. Установите взаимное расположение:
а) прямой B_1D_1 и плоскости (ABC);
б) прямых B_1D_1 и AC;
в) прямых B_1O и DD_1, где O — середина отрезка AC.



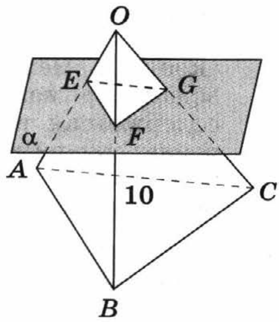
2. Параллелограммы $ABCD$ и $BCEF$ не лежат в одной плоскости. Через точку F параллельно прямой CD проведена прямая l. Докажите, что прямые l и DG, где G — середина отрезка CE, не имеют общих точек.

3. (***Дополнительное задание.***) Даны три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Через точку C проведена прямая a, параллельная прямой AB, а через точку A — прямая b, не пересекающая прямую a и не проходящая через точку B. Через точку C проведена прямая c, параллельная прямой b. Определите, имеют ли общие точки прямые c и AB. Объясните свой ответ.

С — 5

1. Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Через вершину A ломаной $ABDC$ проведена плоскость α, параллельная плоскости (CDB). Добавьте к ломаной $ABDC$ ещё одно звено AE, лежащее в плоскости α. Установите, как звено AE может располагаться относительно прямой DC, и изобразите его на чертеже.

2. Даны четыре точки O, A, B, C, не лежащие в одной плоскости. Точка G делит отрезок OC в отношении $2 : 3$, считая от точки O. Через точку G проведена плоскость α, параллельная плоскости (ABC) и пересекающая отрезки OA и OB соответственно в точках E и F. Найдите длину отрезка EG, если $AC = 10$ см.



$OG : GC = 2 : 3$

С — 6

1. Треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 1) является параллельной проекцией треугольника ABC. Постройте проекцию прямой l, параллельной стороне AB и пересекающей сторону BC в точке E, такой, что $BE : EC = 1 : 2$.

2. Точка B_1 и отрезок M_1N_1 (рис. 2) являются параллельными проекциями вершины B и средней линии MN, параллельной стороне BC треугольника ABC. Постройте параллельную проекцию треугольника ABC.

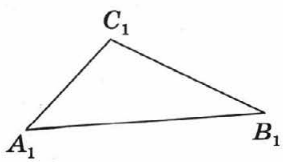


Рис. 1

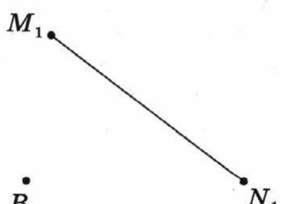
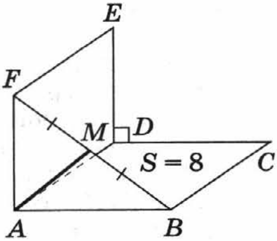


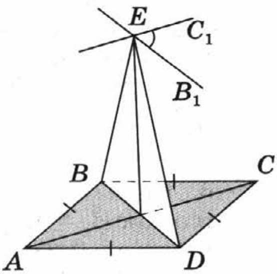
Рис. 2

С — 7

1. Два квадрата $ABCD$ и $ADEF$, лежащие в разных плоскостях, расположены так, что угол CDE равен $90°$. Найдите длину медианы AM треугольника ABF, если площадь квадрата $ABCD$ равна 8 см².



2. Треугольник BDE и ромб $ABCD$ расположены в разных плоскостях α и β. Через точку E проведена плоскость γ, параллельная плоскости (ABC), которая пересекает плоскость (BDE) по прямой B_1E, а плоскость (ACE) по прямой C_1E. Найдите угол B_1EC_1.

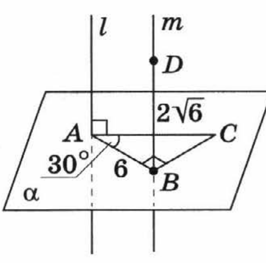


3. (***Дополнительное задание.***) Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Сравните расстояния AC и BD ломаной $ABCD$, если прямая AB перпендикулярна плоскости (ACD), $\angle ACD = 60°$, $AB = 12$ см, $BC = 13$ см, $CD = 6$ см.

С — 8

1. В плоскости α даны две точки A и B. Через точку A проведена плоскость β перпендикулярно прямой AB, а через точку B — прямая l перпендикулярно плоскости α. Определите, имеют ли общие точки плоскость β и плоскость γ, проходящая через точку A и прямую l. Если имеют, то изобразите их на чертеже.

2. В плоскости α дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B. Через точку A проведена прямая l, перпендикулярная плоскости α, а через точку B — прямая m, параллельная прямой l. На прямой m выбрана точка D так, что $BD = 2\sqrt{6}$ см. Найдите длины отрезков AC, AD, DC, если $AB = 6$ см и $\angle BAC = 30°$.



С — 9

1. Через центр O окружности, описанной около правильного треугольника ABC, проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника (рис. 1). На этой прямой выбрана точка M так, что $OM = 8$ см. Найдите расстояние от точки M до вершин треугольника ABC, если точка M удалена от стороны AC на расстояние 12 см.

2. В плоскости α дан ромб $KLMN$ с центром в точке O и острым углом K, равным $60°$ (рис. 2). Точка P расположена вне плоскости α так, что прямая OP перпендикулярна плоскости α.

   а) Докажите, что плоскости (KPM) и (LPN) перпендикулярны.

   б) Через точку A — середину отрезка OP проведена плоскость β перпендикулярно прямой OP. Определите, имеет ли плоскость β общие точки с плоскостью (OPM). Если имеет, то изобразите их на чертеже.

   в) Найдите стороны данного ромба, если $AB = 2\sqrt{3}$ см, где B — точка пересечения плоскости β и прямой PM.

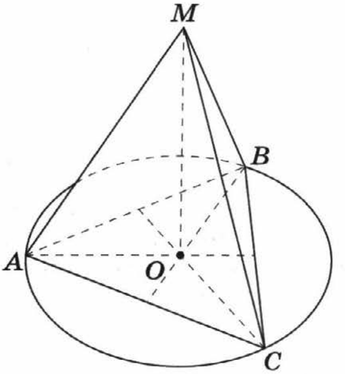
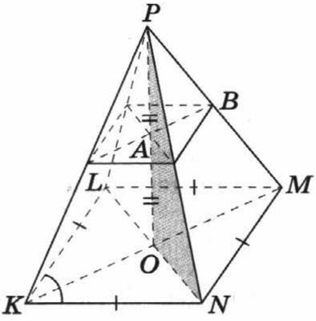


Рис. 1



$\angle LKN = 60°$, $AB = 2\sqrt{3}$

Рис. 2

С — 10

В пространстве заданы точки

$A\ (1;\ -7;\ -2)$, $B\ (1;\ -2;\ -2)$, $C\ (3;\ -4;\ -2)$,
$D\ (5;\ -2;\ -2)$, $E\ (5;\ -7;\ -2)$, $F\ (6;\ -2;\ -2)$,
$G\ (6;\ -7;\ -2)$, $H\ (9;\ -2;\ -2)$, $K\ (9;\ -7;\ -2)$,
$L\ (10;\ -7;\ -2)$, $M\ (10;\ -2;\ -2)$, $N\ (13;\ -2;\ -2)$,
$O\ (13;\ -5;\ -2)$, $P\ (10;\ -5;\ -2)$.

а) Рассмотрите внимательно координаты данных точек. Какую особенность вы заметили? Опишите её, используя буквы x, y, z для координат точки пространства.

б) Мысленно спроектируйте данные точки на координатные плоскости xy, xz, yz. Только на одной из координатных плоскостей можно получить буквы русского алфавита, если последовательно соединить отрезками проекции данных точек. Укажите эту плоскость, постройте в ней проекции, изобразите ломаные, вершинами которых являются проекции, и прочитайте слово.

в) (***Дополнительное задание.***) Измените в этом слове последнюю букву так, чтобы получилось новое слово. Запишите координаты вершин ломаной, с помощью которой можно изобразить эту букву на координатной плоскости.

С — 11

1. В плоскости xy дан ромб $ABCD$ с центром в точке O. Найдите площадь треугольника AOB, если известно, что $A\ (-4;\ 5;\ 0)$, $B\ (4;\ 11;\ 0)$, $C\ (12;\ 5;\ 0)$, $D\ (4;\ -1;\ 0)$.

2. Запишите координаты точки C', симметричной точке C — середине отрезка AB относительно начала координат, если $A\ (2;\ -3;\ 5)$, $B\ (-8;\ 7;\ -3)$.

3. (***Дополнительное задание.***) Установите, как расположены точки A и B относительно координатных осей, если точка $C\ (0;\ 2;\ 0)$ является серединой отрезка AB.

С — 12

Квадраты $ABCD$ и $BCEF$ расположены в разных плоскостях α и β, при этом прямая AB перпендикулярна прямой BF, точки K и L — середины сторон EF и EC соответственно. Найдите углы:

а) между прямыми KL и AC;

б) между прямой AC и плоскостью (BKL);

в) между плоскостями (ABC) и (BKL);

г) (***Дополнительное задание.***) между прямой KL и плоскостью (ACF).

С — 13

1. Дан параллелограмм $ABCD$ и точка B', не принадлежащая плоскости этого параллелограмма. Найдите координаты вектора $\overline{p} = \overline{B'D} + \overline{AD}$, если известно, что $A\ (1;\ -1;\ 2)$, $B\ (2;\ 0;\ 3)$, $D\ (0;\ -4;\ 1)$, $B'\ (1;\ 3;\ 1)$.

2. Треугольник ABC и параллелограмм $BCDE$ с центром в точке O расположены в разных плоскостях α и β, точки F, G, H — середины сторон AC, ED и CD соответственно. Назовите и изобразите на чертеже векторы:

   а) $\overline{m} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{BE}$; б) $\overline{p} = \frac{1}{2}\left(\overline{CB} + \overline{CD}\right)$;

   в) $\overline{n} = \frac{1}{2}\overline{AD} + \overline{HC}$.

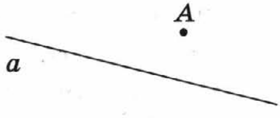
С — 14

1. Даны четыре точки $A\ (-4;\ 1;\ 3)$, $B\ (5;\ 1;\ 8)$, $C\ (9;\ 1;\ 3)$, $D\ (5;\ 1;\ -1)$. Найдите площадь четырёхугольника $KLMN$, вершины которого совпадают с серединами отрезков AB, BC, CD, DA соответственно.

2. Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Точки E, F, G, H — середины отрезков AD, AB, CB, AC соответственно. Пусть $\overline{a} = \overline{GH}$, $\overline{b} = \overline{GF}$, $\overline{c} = \overline{FE}$. Выразите векторы $\overline{FA}$, $\overline{AD}$, $\overline{DC}$ через векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.

Вариант 4

С — 1



1. Рассмотрите предложенный рисунок и символьную запись к нему. Подумайте, каким из аксиом или теорем стереометрии они могут соответствовать.
Выполните этот рисунок и запись в тетради и дополните их так, чтобы получилась иллюстрация и краткая запись одной из аксиом или теорем стереометрии, приведённых в следующем списке:

1. Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей. Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

$С_1$. Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.

$С_2$. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

$С_3$. Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.

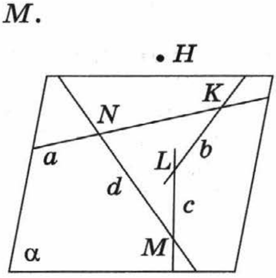
Т1.1. Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.

Укажите, какое утверждение имеется в виду.

2. Прямые a, b, c, d плоскости α попарно пересекаются в точках K, L, M, N:

$$a \cap d = N,\ a \cap b = K,$$
$$b \cap c = L,\ c \cap d = M.$$

Точка H не принадлежит плоскости α. Выполнив чертёж, покажите на нём и запишите все плоскости, отличные от плоскости α, которые содержат точку K и определяются прямыми, проходящими через какие-либо две из данных точек K, L, M, N, H.



3. (*Дополнительное задание.*) В пространстве заданы три прямые, пересекающиеся в точке M. Укажите, сколько всего — две или три — различных плоскостей, каждая из которых содержит любые две из данных прямых, не может существовать в пространстве.

Прокомментируйте свой выбор. Для этого:

а) в списке некоторых аксиом и теорем стереометрии из задания 1 выберите утверждения, которые использованы при решении данной задачи;

б) запишите, в каком порядке используются эти утверждения.

С — 2

1. Даны точка A, две различные плоскости α и β, имеющие общую точку M, отличную от точки A, и плоскость γ, отличная от плоскостей α и β, содержащая какие-нибудь две точки, принадлежащие как плоскости α, так и плоскости β. Определите, какой плоскости — α, β или γ — принадлежит середина E отрезка AM, если:

   а) $A \in \alpha$, $A \notin \beta$; в) $A \notin \alpha$, $A \in \beta$;
   б) $A \in \alpha$, $A \in \beta$; г) $A \notin \alpha$, $A \notin \beta$.

   В каждом случае изобразите плоскости на чертеже и покажите точки A и E.

   Выберите одно или несколько заданий а) — г) и выполните их.

2. Даны параллелограмм $ABCD$ с центром в точке O и треугольник BDE, не лежащие в одной плоскости. Пусть M и M' — точки пересечения медиан треугольников BDC и BDE соответственно. Докажите, что прямая AE и отрезок XY, где X, Y — произвольные точки отрезков CE и MM' соответственно, лежат в одной плоскости.

3. (*Дополнительное задание.*) Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости, точки M и N являются точками пересечения медиан треугольников ABC и ABD соответственно. Выясните, лежит ли прямая MN в какой-либо плоскости, проходящей через три из данных точек A, B, C, D.

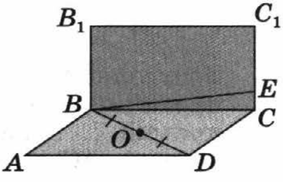
С — 3

1. Даны два треугольника ADC и ABD, не лежащие в одной плоскости. Точки K, L, M являются серединами сторон DC, AD, AB соответственно. Установите взаимное расположение прямых:
а) AK и CL; б) AK и DM; в) BD и ML.

2. В плоскости α на параллельных прямых a и b взяты соответственно точки B и D. Точка E выбрана вне плоскости α. Выясните, имеют ли общие точки плоскость β, содержащая точку D и прямую c, проведённую через точку E параллельно прямой BD, и плоскость γ, которая содержит прямую a и прямую d, проведённую через точку E параллельно прямой b. Если имеют, то покажите их на чертеже. Объясните свой ответ.

3. (***Дополнительное задание.***) Даны два треугольника ABC и ADC, не лежащие в одной плоскости. Точки M, N, P являются серединами отрезков AB, AC, AD соответственно. Точка H делит отрезок AB в отношении $1 : 2$, считая от вершины B. Установите взаимное расположение прямых: а) MN и CH; б) CH и NP.

С — 4



$CE : EC_1 = 1 : 4$

1. Параллелограммы $ABCD$ (с центром в точке O) и BCC_1B_1 не лежат в одной плоскости. Опишите взаимное расположение:
а) прямой C_1C и плоскости (DOB_1), где O — середина отрезка BD;
б) прямых C_1C и BD;
в) прямых BE и C_1B_1, где E — точка на ребре CC_1, такая, что $CE : EC_1 = 1 : 4$.

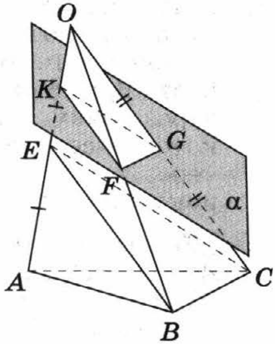
2. Параллелограммы $ABCD$ и $BCEF$ расположены в разных плоскостях. Через точку D проведена прямая l, параллельная прямой BE. Докажите, что прямые l и EG, где G — середина отрезка BC, не имеют общих точек.

3. (***Дополнительное задание.***) Даны прямая a и не принадлежащая ей точка A. Через точку A проведены прямая b, параллельная прямой a, и прямая c, пересекающая прямую a в точке B. Через точку B проведена прямая d, не пересекающая прямую b и отличная от прямой a, а через точку E — середину отрезка AB — прямая l, параллельная прямой a. Определите, пересекаются ли прямые d и l. Объясните свой ответ.

С — 5

1. Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Через вершину A ломаной $ACBD$ проведена плоскость α, параллельная плоскости (BCD). Добавьте к ломаной $ACBD$ ещё одно звено AE, лежащее в плоскости α. Установите, как звено AE может располагаться относительно прямой BD, и изобразите его на чертеже.

2. Даны четыре точки O, A, B, C, не лежащие в одной плоскости. Точки E и G — середины отрезков OA и OC соответственно. Через точку G параллельно плоскости (BEC) проведена плоскость α, пересекающая отрезки OA и OB в точках K и F соответственно. Найдите длину отрезка EK, если $OA = 12$ см.



$OA = 12$

С — 6

1. Треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 1) является параллельной проекцией треугольника ABC. Постройте проекцию прямой l, параллельной стороне BC и пересекающей сторону AC в точке E, такой, что $AE : EC = 1 : 3$.

2. Точки E_1, F_1, G_1 (рис. 2) являются параллельными проекциями середин E и F сторон AB и BC, а также G — точки пересечения медиан треугольника ABC. Постройте параллельную проекцию треугольника ABC.

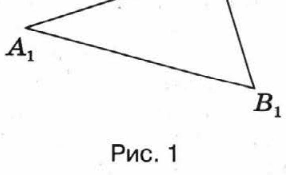


Рис. 1

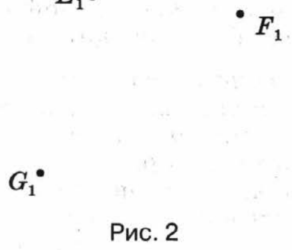
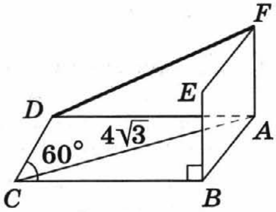


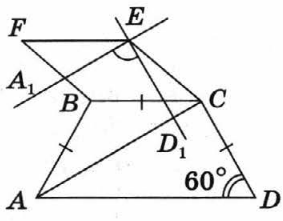
Рис. 2

С — 7

1. Два ромба $ABCD$ и $ABEF$, лежащие в разных плоскостях, расположены так, что угол CBE равен 90°. Найдите длину отрезка DF, если $\angle BCD = 60°$, $AC = 4\sqrt{3}$ см.



2. Равнобедренная трапеция $ABCD$ и параллелограмм $BCEF$ расположены в разных плоскостях α и β. Через точку E проведена плоскость γ, параллельная плоскости (ABC), которая пересекает плоскость (CDE) по прямой D_1E, а плоскость (ACE) — по прямой A_1E. Найдите угол A_1ED_1, если $AB = BC = CD$, а $\angle ADC = 60°$.

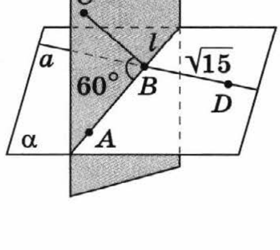


3. (***Дополнительное задание.***) Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Сравните расстояния AD и BD ломаной $ABCD$, если прямая BC перпендикулярна плоскости (ACD), угол ADC прямой, $\angle ABC = 30°$, $AB = 12$ см, $CD = 5$ см.

С — 8

1. В плоскости α заданы прямая a и не принадлежащая ей точка A. Через точку A перпендикулярно прямой a проведена прямая l, пересекающая эту прямую в точке B. Через точку B проведена плоскость β перпендикулярно прямой a, а через середину отрезка AB — плоскость γ, перпендикулярная прямой AB. Определите, имеют ли общие точки плоскости β и γ. Если имеют, то изобразите их на чертеже.

2. В плоскости α заданы прямая a и не принадлежащая ей точка A. Через точку A перпендикулярно прямой a проведена прямая l, пересекающая эту прямую в точке B, а через точку B — плоскость β, перпендикулярная прямой a. В плоскости β выбрана точка C так, что $CB = 5$ см. Найдите длины отрезков AC, AD, CD, если точка D принадлежит прямой a, $BD = \sqrt{15}$ см, $AB = 15$ см и $\angle ABC = 60°$.



С — 9

1. Через центр O окружности, описанной около правильного треугольника ABC, проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника (рис. 1), и на этой прямой выбрана точка M. Найдите расстояние от точки M до вершин треугольника ABC, если центр данной окружности удалён от сторон треугольника на расстояние 1 см, а точка M удалена от стороны BC на расстояние 7 см.

2. В плоскости α дан прямоугольник $ABCD$ с центром в точке O и углом ABD, равным 30° (рис. 2). Точка M расположена вне плоскости α так, что прямая OM перпендикулярна плоскости α.

   а) Докажите, что плоскости (FMO) и (EMO) перпендикулярны, где точки F и E — середины сторон CD и CB прямоугольника.

   б) Через точку K — середину отрезка OM проведена плоскость β перпендикулярно прямой OM. Определите, имеет ли плоскость β общие точки с плоскостями (FMO) и (EMO). Если имеет, то изобразите их на чертеже.

   в) Найдите стороны данного прямоугольника, если $KP = 1{,}5$ см, где P — точка пересечения плоскости β и прямой FM.

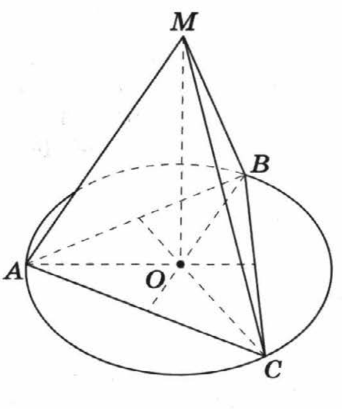
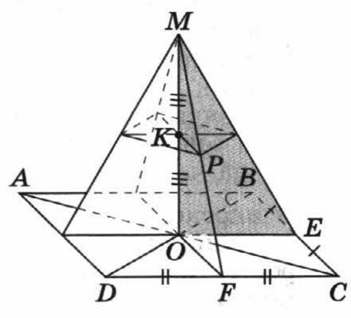


Рис. 1



$\angle ABD = 30°$, $KP = 1{,}5$

Рис. 2

С — 10

В пространстве заданы точки

$$A\ (-6;\ -2;\ -2),\ B\ (-6;\ -2;\ 3),\ C\ (-4;\ -2;\ 1),$$
$$D\ (-2;\ -2;\ 3),\ E\ (-2;\ -2;\ -2),\ F\ (-1;\ -2;\ 3),$$
$$G\ (-1;\ -2;\ -2),\ H\ (2;\ -2;\ 3),\ K\ (2;\ -2;\ -2),$$
$$L\ (3;\ -2;\ -2),\ M\ (3;\ -2;\ 3),\ N\ (6;\ -2;\ 3),$$
$$O\ (6;\ -2;\ 0),\ P\ (3;\ -2;\ 0).$$

а) Рассмотрите внимательно координаты данных точек. Какую особенность вы заметили? Опишите её, используя буквы x, y, z для координат точки пространства.

б) Мысленно спроектируйте данные точки на координатные плоскости xy, xz, yz. Только на одной из координатных плоскостей можно получить буквы русского алфавита, если последовательно соединить отрезками проекции данных точек. Укажите эту плоскость, постройте в ней проекции, изобразите ломаные, вершинами которых являются проекции, и прочитайте слово.

в) (***Дополнительное задание.***) Измените в этом слове последнюю букву так, чтобы получилось новое слово. Запишите координаты вершин ломаной, с помощью которой можно изобразить эту букву на координатной плоскости.

С — 11

1. В плоскости xy дан квадрат $ABCD$ с центром в точке O. Найдите площадь треугольника AOB, если известно, что $A\ (-3;\ 3;\ 0)$, $C\ (3;\ -5;\ 0)$.

2. Запишите координаты точки C', симметричной точке C — середине отрезка AB относительно начала координат, если $A\ (4;\ 3;\ -1)$, $B\ (-2;\ -7;\ 5)$.

3. (***Дополнительное задание.***) Установите, как расположены точки A и B относительно координатных осей, если точка $C\ (0;\ 0;\ -2)$ является серединой отрезка AB.

С — 12

Квадраты $ABCD$ и DCC_1D_1 расположены в разных плоскостях α и β, при этом прямая DD_1 перпендикулярна прямой AD. Найдите углы:

а) между прямыми AD и CD_1;

б) между прямой C_1D и плоскостью (ABC);

в) между плоскостями (ABC) и (DCC_1);

г) (***Дополнительное задание.***) между прямыми AC и CD_1.

С — 13

1. Дан параллелограмм $ABCD$ и точка B', не принадлежащая плоскости этого параллелограмма. Найдите координаты вектора $\overline{p} = \overline{B'D} + \overline{CD}$, если известно, что A (2; −3; 1), B (1; 1; −1), D (1; −5; 3), B' (3; 2; 1).

2. Треугольник ABC и параллелограмм $ABDE$ с центром в точке O расположены в разных плоскостях α и β, точки F, G, H — середины сторон AC, BD и AE соответственно. Назовите и изобразите на чертеже векторы:

а) $\overline{m} = \overline{EA} + \overline{AB} + \overline{BC}$; б) $\overline{p} = \frac{1}{2}\left(\overline{DE} + \overline{DB}\right)$;

в) $\overline{n} = \frac{1}{2}\overline{AD} + \overline{EH}$.

С — 14

1. Даны четыре точки A (−3; 1; 0), B (0; 1; 5), C (8; 1; 0), D (0; 1; −4). Найдите площадь четырёхугольника $KLMN$, вершины которого совпадают с серединами отрезков AB, BC, CD, DA соответственно.

2. Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Точки E, F, G, H — середины отрезков AB, DB, AD, AC соответственно. Пусть $\overline{a} = \overline{GH}$, $\overline{b} = \overline{GF}$, $\overline{c} = \overline{FE}$. Выразите векторы $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{DB}$ через векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

К — 1 ***Вариант 1***

1. Вершины ломаной $ABCD$ не принадлежат одной плоскости. Назовите все плоскости, которые определяются прямыми, проходящими через вершины ломаной $ABCD$, и содержат только одно звено этой ломаной.

2. Даны две плоскости α и β и три точки A, B, M, причём точка M принадлежит обеим плоскостям, точки A и B принадлежат соответственно плоскостям α и β. Выясните, имеют ли общие точки плоскость (ABM) и плоскость γ, проходящая через линию пересечения плоскостей α и β и точку E — середину отрезка AB. Если имеют, то покажите их на чертеже. Объясните свой ответ.

3. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Прямая l, параллельная прямой AB, пересекает медианы CE и CF треугольников CBD и CAD соответственно в точках G и H так, что $CH : HF = 3 : 1$. Найдите длину отрезка AB, если $GH = 3$ см.

К — 1 ***Вариант 2***

1. В плоскости α даны четыре точки A, B, C, D, никакие три из которых не принадлежат одной прямой. Точка M не принадлежит плоскости α. Назовите все плоскости, которые определяются прямыми, проходящими через вершины ломаной $AMBCD$, и содержат только одно звено этой ломаной.

2. Даны две плоскости α и β и три точки A, B, M, причём точка M принадлежит обеим плоскостям, точка A не принадлежит ни одной из них, точка B принадлежит плоскости β. Выясните, имеют ли общие точки плоскость (ABM) и плоскость γ, проходящая через линию пересечения плоскостей α и β и содержащая точку A. Если имеют, то покажите их на чертеже. Объясните свой ответ.

3. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Прямая l, параллельная прямой AD, пересекает медианы BF и BE треугольников ABC и BCD соответственно в точках H и G так, что $BG : GE = 2 : 1{,}5$. Найдите длину отрезка AD, если $GH = 4$ см.

К — 1 ***Вариант 3***

1. В плоскости α даны четыре точки A, B, C, D, никакие три из которых не принадлежат одной прямой. Точка M не принадлежит плоскости α. Назовите все плоскости, которые определяются прямыми, проходящими через вершины ломаной $AMCBD$, и содержат только одно звено этой ломаной.

2. Плоскости α и β имеют общую точку M. Точка A принадлежит плоскости α и не принадлежит плоскости β. Прямая b лежит в плоскости β и пересекает плоскость α в точке K, отличной от точки M. Выясните, имеют ли общие точки плоскость α и плоскость γ, проходящая через прямую b и точку E — середину отрезка AM. Если имеют, то покажите их на чертеже. Объясните свой ответ.

3. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Прямая l, параллельная прямой CD, пересекает медианы AF и AE треугольников ABC и ADB соответственно в точках H и G так, что $GE : GA = 1 : 4$. Найдите длину отрезка CD, если $GH = 4$ см.

К — 1 ***Вариант 4***

1. В плоскости α даны четыре точки A, B, C, D, никакие три из которых не принадлежат одной прямой. Точка M не принадлежит плоскости α. Назовите все плоскости, которые определяются прямыми, проходящими через вершины ломаной $AMDCB$, и содержат только одно звено этой ломаной.

2. Плоскости α и β имеют общую точку M. Прямые a и b лежат соответственно в плоскостях α и β и проходят через точку M. Точка A лежит в плоскости α и не принадлежит прямой a. Выясните, имеют ли общие точки плоскость, проходящая через прямые a и b, и плоскость γ, проходящая через линию пересечения плоскостей α и β и точку E — середину отрезка AM. Если имеют, то покажите их на чертеже. Объясните свой ответ.

3. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Прямая l, параллельная прямой AC, пересекает медианы DF и DE треугольников BCD и ADB соответственно в точках H и G так, что $GD = GE$. Найдите длину отрезка AC, если $GH = 3$ см.

---

1. Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости, точка E — середина отрезка AD. На лучах AC и AB взяты соответственно точки C_1 и B_1 так, что $AC_1 : AC = 3 : 2$, $B \in [AB_1]$ и $BB_1 = 3$ см. Установите, как расположены прямая C_1B_1 и плоскость (CDB) в пространстве, если известно, что точка F — точка пересечения прямых B_1E и BD — делит отрезок BD в отношении $1 : 3$, считая от точки B.

2. Даны три параллелограмма $ABCD$, ABB_1A_1, BCC_1B_1, лежащие в плоскостях α, β, γ соответственно.

   а) Докажите, что прямая OO_1, которая проходит через центры O и O_1 параллелограммов ABB_1A_1 и BCC_1B_1 соответственно, параллельна плоскости α.

   б) Существует ли какая-нибудь другая плоскость, определяемая вершинами данных параллелограммов, которой параллельна прямая OO_1? Если существует, то изобразите её на чертеже. Объясните свой ответ.

3. Прямые a, b, c, проходящие через точку O, пересекают плоскость α соответственно в точках A, B, C, не лежащих на одной прямой. Через точку A проведена плоскость β, параллельная прямым BO и BC, которая пересекает плоскость α по прямой l. Выясните, пересекаются ли прямые l и BE, где E — середина отрезка AC. Если пересекаются, то изобразите точку пересечения на чертеже.

1. Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости, точка E — середина отрезка AB. На лучах AC и AD взяты соответственно точки C_1 и D_1 так, что $AC_1 : AC = 4 : 3$, $D \in [AD_1]$ и $DD_1 = 2$ см. Установите, как расположены прямая C_1D_1 и плоскость (CDB) в пространстве, если известно, что точка F — точка пересечения прямых D_1E и BD — делит отрезок BD в отношении $1 : 4$, считая от точки D.

2. Даны три параллелограмма $ABCD$, ABB_1A_1, BCC_1B_1, лежащие в плоскостях α, β, γ соответственно.

   а) Докажите, что прямая OO_1, которая проходит через центры O и O_1 параллелограммов $ABCD$ и BCC_1B_1 соответственно, параллельна плоскости β.

   б) Существует ли какая-нибудь другая плоскость, определяемая вершинами данных параллелограммов, которой параллельна прямая OO_1? Если существует, то изобразите её на чертеже. Объясните свой ответ.

3. Параллельные прямые a, b, c пересекают плоскость α соответственно в точках A, B, C, не лежащих на одной прямой. Через точку A_1, принадлежащую прямой a, проведена плоскость β, параллельная плоскости α и пересекающая прямую c в точке C_1, а плоскость прямых a, b по прямой l. Выясните, имеют ли общие точки прямые l и BE, где E — середина отрезка A_1C_1. Если имеют, то изобразите их на чертеже.

1. Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости, точка E — середина отрезка AB. На лучах BC и BD взяты соответственно точки C_1 и D_1 так, что $BD_1 : BD = 5 : 4$, $C \in [BC_1]$ и $CC_1 = 1{,}5$ см. Установите, как расположены прямая C_1D_1 и плоскость (ACD) в пространстве, если известно, что точка F — точка пересечения прямых C_1E и AC — делит отрезок AC в отношении $1 : 5$, считая от точки C.

2. Даны три параллелограмма $ABCD$, ADD_1A_1, DCC_1D_1, лежащие в плоскостях α, β, γ соответственно.

   а) Докажите, что прямая OO_1, которая проходит через центры O и O_1 параллелограммов $ABCD$ и ADD_1A_1 соответственно, параллельна плоскости γ.

   б) Существует ли какая-нибудь другая плоскость, определяемая вершинами данных параллелограммов, которой параллельна прямая OO_1? Если существует, то изобразите её на чертеже. Объясните свой ответ.

3. Параллельные прямые a, b, c пересекают плоскость α соответственно в точках A, B, C, не лежащих на одной прямой. Через точку A_1, принадлежащую прямой a, проведена плоскость β, параллельная плоскости α и пересекающая прямую c в точке C_1, а плоскость прямых b, c по прямой l. Выясните, имеют ли общие точки прямые l и BE, где E — середина отрезка A_1C_1. Если имеют, то изобразите их на чертеже.

1. Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости, точка E — середина отрезка BD. На лучах BA и BD взяты соответственно точки A_1 и D_1 так, что $BD_1 : BD = 7 : 4$, $A \in [BA_1]$ и $AA_1 = 2{,}5$ см. Установите, как расположены прямая A_1D_1 и плоскость (ACD) в пространстве, если известно, что точка F — точка пересечения прямых A_1E и AD — делит отрезок AD в отношении $1 : \frac{7}{3}$, считая от точки A.

2. Даны три параллелограмма $ABCD$, BCC_1B_1, B_1C_1EF, лежащие в плоскостях α, β, γ соответственно.

   а) Докажите, что прямая OO_1, которая проходит через центры O и O_1 параллелограммов BCC_1B_1 и B_1C_1EF соответственно, параллельна плоскости (BC_1F).

   б) Существует ли какая-нибудь другая плоскость, определяемая вершинами данных параллелограммов, которой параллельна прямая OO_1? Если существует, то изобразите её на чертеже. Объясните свой ответ.

3. Параллельные прямые a, b, c соответственно пересекают плоскость α в точках A, B, C так, что точка B — середина отрезка AC. Точка D лежит в плоскости α вне прямой AB. Через точку B проведена плоскость β, параллельная плоскости γ, содержащей точку D и прямую a. Плоскости α и β пересекаются по прямой l. Выясните, имеют ли общие точки прямая l, плоскость β и плоскость σ, содержащая прямую c и точку D. Если имеют, то изобразите их на чертеже.

К — 3 *Вариант 1*

1. Прямые a, b, c, проходящие через точку O, пересекают плоскость α соответственно в точках A, B, C, не лежащих на одной прямой. При этом углы OBC и OBA прямые, $OC = 10$ см, $BC = 8$ см. Найдите длину отрезка OM, где M — точка на отрезке AC, такая, что $BM = 3$ см.

2. Четыре точки O, A, B, C не лежат в одной плоскости, при этом углы OAC и OAB прямые, угол ACB равен $30°$, $OB = OC$, $AE = 3$ см, где точка E — середина отрезка BC. Прямая l, проходящая через точку C параллельно прямой AE, пересекает прямую AB в точке D. Найдите площадь четырёхугольника $ADCE$.

К — 3 *Вариант 2*

1. Прямые a, b, c, проходящие через точку O, пересекают плоскость α соответственно в точках A, B, C, не лежащих на одной прямой. При этом углы ABC и OBA прямые, $OA = 17$ см, $OB = 15$ см. Найдите длину отрезка AM, где M — точка на отрезке OC, такая, что $BM = 6$ см.

2. Четыре точки O, A, B, C не лежат в одной плоскости, точка F — середина отрезка BC. При этом углы OAC и OAB прямые, угол BAF равен $60°$, $OB = OC = 13$ см, $AF = 2{,}5$ см. Прямая l, проходящая через точку B параллельно прямой AF, пересекает прямую AC в точке D. Найдите площадь треугольника ODC.

К — 3 *Вариант 3*

1. Прямые a, b, c, проходящие через точку O, пересекают плоскость α соответственно в точках A, B, C, не лежащих на одной прямой. Точка M — середина отрезка AC, $AB = BC = 5$ см, угол OMC прямой. Найдите длину медианы BE треугольника OBM, если $AC = 8$ см, $OM = 4$ см, $OB = \sqrt{7}$ см.

2. Четыре точки O, A, B, C не лежат в одной плоскости, точка G — середина отрезка AB. При этом углы OCA и OCB прямые, угол BCG равен $30°$, $CB = AC$, $AB = 8$ см, $OA = 17$ см. Прямая l, проходящая через точку A параллельно прямой CG, пересекает прямую BC в точке M. Найдите площадь треугольника OBM.

К — 3 *Вариант 4*

1. В плоскости α дан ромб $ABCD$ с центром в точке O и стороной 10 см. Точка E расположена вне плоскости α так, что углы EOD и ECO — прямые и $EC = 10\sqrt{2}$ см. Найдите длину медианы DM треугольника DCE.

2. Четыре точки O, A, B, C не лежат в одной плоскости, точка H — середина отрезка AC. При этом углы OBA и OBC — прямые, расстояние от точки O до прямой AC равно $10\sqrt{6}$, $CB = AB = 7$ см, $OB = 24$ см. Прямая l, проходящая через точку A параллельно прямой BH, пересекает прямую BC в точке K. Найдите площадь четырёхугольника $AKBH$.

К — 4 *Вариант 1*

1. Треугольник ABC и параллелограмм $ACDE$ расположены в разных плоскостях α и β, точки F, G, H — середины сторон AC, ED и CD соответственно. Назовите и покажите на чертеже вектор $\overline{p} = \frac{1}{2}\left(\overline{BA} + \overline{BC} + \overline{AD}\right)$.

2. Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Точки K, L, M, N — середины отрезков AB, BC, CD, DB соответственно. Пусть $\overline{a} = \overline{KL}$, $\overline{b} = \overline{LM}$, $\overline{c} = \overline{MN}$. Выразите вектор $\overline{DA}$ через векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.

3. Даны три точки A $(1; -1; -2)$, B $(3; -5; -8)$, C $(2; -3; -5)$. На оси Ox найдите точку D такую, что векторы $\overline{BA}$ и $\overline{CD}$ перпендикулярны.

К — 4 *Вариант 2*

1. Треугольник ABC и параллелограмм $ACDE$ с центром в точке O расположены в разных плоскостях α и β, точки F, G, H — середины сторон AC, ED и CD соответственно. Назовите и покажите на чертеже вектор $\overline{p} = \frac{1}{2}\left(\overline{BA} + \overline{BC} + \overline{CD}\right)$.

2. Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Точки E, F, G, H — середины отрезков AB, AC, CD, AD соответственно. Пусть $\overline{a} = \overline{FE}$, $\overline{b} = \overline{FG}$, $\overline{c} = \overline{GH}$. Выразите вектор $\overline{DB}$ через векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.

3. Даны три точки A $(-2; 1; -1)$, B $(-4; 3; 7)$, C $(-3; 2; 3)$. На оси Oy найдите точку D такую, что векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ перпендикулярны.

К — 4 *Вариант 3*

1. Треугольник ABC и параллелограмм $BCDE$ с центром в точке O расположены в разных плоскостях α и β, точки F, G, H — середины сторон AC, ED и CD соответственно. Назовите и покажите на чертеже вектор $\overline{p} = \frac{1}{2}\left(\overline{BA} + \overline{BC} + \overline{AD}\right)$.

2. Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Точки E, F, G, H — середины отрезков AD, AB, CB, AC соответственно. Пусть $\overline{a} = \overline{GH}$, $\overline{b} = \overline{GF}$, $\overline{c} = \overline{FE}$. Выразите вектор $\overline{CB}$ через векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.

3. Даны три точки A (2; 3; −7), B (−8; 5; 3), C (−4; 4; −2). На оси Oz найдите точку D такую, что векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ перпендикулярны.

К — 4 *Вариант 4*

1. Треугольник ABC и параллелограмм $ABDE$ с центром в точке O расположены в разных плоскостях α и β, точки F, G, H — середины сторон AC, BD и AE соответственно. Назовите и покажите на чертеже вектор $\overline{p} = \frac{1}{2}\left(\overline{BA} + \overline{BC} + \overline{CD}\right)$.

2. Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Точки E, F, G, H — середины отрезков AB, DB, AD, AC соответственно. Пусть $\overline{a} = \overline{GH}$, $\overline{b} = \overline{GF}$, $\overline{c} = \overline{FE}$. Выразите вектор $\overline{BC}$ через векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.

3. Даны три точки A (−1; −2; 1), B (3; −8; −9), C (1; −5; −4). В плоскости xy найдите такую точку D, у которой абсцисса равна ординате, что векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ перпендикулярны.

ОТВЕТЫ

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

С — 1

Вариант 1. **1.** С1. **2.** Плоскости (ABE), (BCE), (BDE). **3.** 2.
Вариант 2. **1.** С2. **2.** Плоскости (CDF), (ADF), (BDF). **3.** 2.
Вариант 3. **1.** С3. **2.** Плоскости (KLG), (LGN), (MLG). **3.** Да.
Вариант 4. **1.** Т.1.1. **2.** Плоскости (HKM), (HKL), (HKN). **3.** 2.

С — 2

Вариант 1. **1.** а) α; б) α, β, γ; в) β; г) возможно γ. **2.** $ZM \in (BDX)$. **3.** Нет.
Вариант 2. **1.** а) α; б) α, β, γ; в) β; г) возможно γ. **2.** $ZM \in (COX)$. **3.** Нет.
Вариант 3. **1.** а) α; б) α, β, γ; в) β; г) возможно γ. **2.** $MY \in (BDE)$. **3.** Нет.
Вариант 4. **1.** а) α; б) α, β, γ; в) β; г) возможно γ. **2.** $XY \in (ACE)$. **3.** Нет.

С — 3

Вариант 1. **1.** а) пересекающиеся; б) скрещивающиеся; в) параллельные. **2.** AB. **3.** а) пересекающиеся; б) скрещивающиеся.
Вариант 2. **1.** а) пересекающиеся; б) скрещивающиеся; в) параллельные. **2.** FN. **3.** а) пересекающиеся; б) скрещивающиеся.
Вариант 3. **1.** а) пересекающиеся; б) скрещивающиеся; в) параллельные. **2.** AF. **3.** а) пересекающиеся; б) скрещивающиеся.
Вариант 4. **1.** а) пересекающиеся; б) скрещивающиеся; в) параллельные. **2.** BE. **3.** а) пересекающиеся; б) скрещивающиеся.

С — 4

Вариант 1. **1.** а) прямая параллельна плоскости; б) скрещивающиеся; в) пересекающиеся. **3.** Нет.
Вариант 2. **1.** а) прямая параллельна плоскости; б) скрещивающиеся; в) пересекающиеся. **3.** Нет.
Вариант 3. **1.** а) прямая параллельна плоскости; б) скрещивающиеся; в) пересекающиеся. **3.** Нет.
Вариант 4. **1.** а) прямая параллельна плоскости; б) скрещивающиеся; в) пересекающиеся. **3.** Нет.

С — 5

Вариант 1. **1.** Получаются параллельные или скрещивающиеся прямые. **2.** 3,5 см.
Вариант 2. **1.** Получаются параллельные или скрещивающиеся прямые. **2.** 6 см.

Вариант 3. **1.** Получаются параллельные или скрещивающиеся прямые. **2.** 4 см.
Вариант 4. **1.** Получаются параллельные или скрещивающиеся прямые. **2.** 3 см.

С — 7

Вариант 1. **1.** 5 см. **2.** 45°. **3.** $AD > BD$.
Вариант 2. **1.** $2\sqrt{5}$ см. **2.** 90°. **3.** $AD > BD$.
Вариант 3. **1.** 2 см. **2.** 90°. **3.** $BD > AC$.
Вариант 4. **1.** $4\sqrt{2}$ см. **2.** 90°. **3.** $BD > AD$.

С — 8

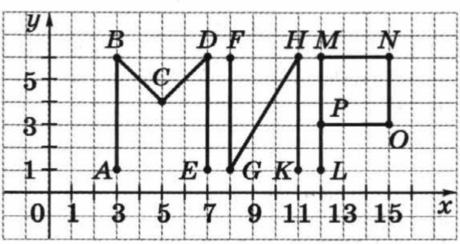
Вариант 1. **1.** Да, если $B = \beta \cap b$; нет, если $B \neq \beta \cap b$. **2.** 7 см, 5 см, $4\sqrt{5}$ см.
Вариант 2. **1.** Да. **2.** $2\sqrt{2}$ см, $2\sqrt{10}$ см, $2\sqrt{7}$ см.
Вариант 3. **1.** Да. **2.** $4\sqrt{3}$ см, $2\sqrt{15}$ см, 6 см.
Вариант 4. **1.** Да. **2.** $5\sqrt{7}$ см, $4\sqrt{15}$ см, $2\sqrt{10}$ см.

С — 9

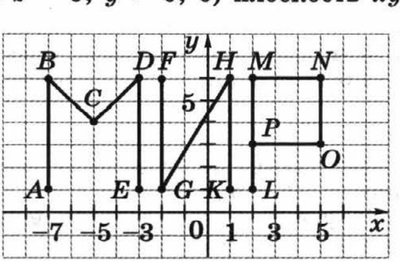
Вариант 1. **1.** $4\sqrt{13}$ см. **2.** в) 12 см, $6\sqrt{2}$ см, $6\sqrt{2}$ см.
Вариант 2. **1.** $6\sqrt{7}$ см. **2.** в) $4\sqrt{2}$ см.
Вариант 3. **1.** $8\sqrt{6}$ см. **2.** в) 8 см.
Вариант 4. **1.** $2\sqrt{13}$ см. **2.** в) 6 см, $6\sqrt{3}$ см.

С — 10

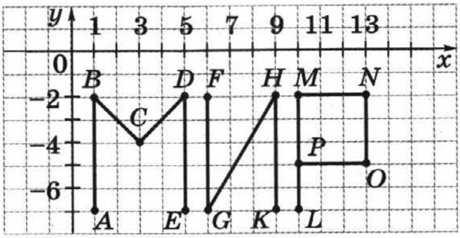
Вариант 1. а) $z = 1$, $x > 0$, $y > 0$; б) плоскость xy, «МИР».



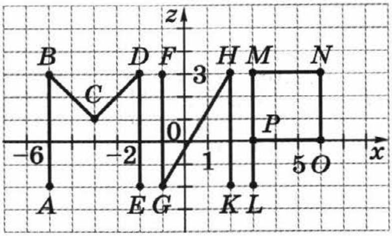
Вариант 2. а) $z = 3$, $y > 0$; б) плоскость xy, «МИР».



Вариант 3. а) $z = -2$, $x > 0$, $y < 0$; б) плоскость xy, «МИР».



Вариант 4. а) $z = -2$; б) плоскость xz, «МИР».



С — 11

Вариант 1. **1.** $4\sqrt{65}$ см^2. **2.** $C'(1; -2; -4)$. **3.** Симметричны относительно оси Oz.

Вариант 2. **1.** $5\sqrt{65}$ см^2. **2.** $C'(2; -1; -2)$. **3.** Симметричны относительно оси Ox.

Вариант 3. **1.** 24 см^2. **2.** $C'(3; -2; -1)$. **3.** Симметричны относительно оси Oy.

Вариант 4. **1.** 12,5 см^2. **2.** $C'(-1; 2; -2)$. **3.** Симметричны относительно оси Oz.

С — 12

Вариант 1. а) 90°; б) 90°; в) 90°; г) 60°.

Вариант 2. а) 45°; б) 90°; в) 90°; г) 0°.

Вариант 3. а) 60°; б) 45°; в) 90°; г) 0°.

Вариант 4. а) 90°; б) 45°; в) 90°; г) 60°.

С — 13

Вариант 1. **1.** $(-1; -7; 0)$. **2.** а) $\overline{AD}$; б) $\overline{OH}$; в) $\overline{AO}$.

Вариант 2. **1.** $(0; -3; -2)$. **2.** а) $\overline{BE}$; б) $\overline{OG}$; в) $\overline{DO}$.

Вариант 3. **1.** $(-2; -10; -1)$. **2.** а) $\overline{AD}$; б) $\overline{CO}$; в) $\overline{FC}$.

Вариант 4. **1.** $(-1; -11; 4)$. **2.** а) $\overline{EC}$; б) $\overline{DO}$; в) $\overline{OG}$.

С — 14

Вариант 1. **1.** 25 см^2. **2.** $\overline{BC} = -2\bar{c}$; $\overline{CD} = 2(\bar{b} + \bar{c})$; $\overline{KB} = \bar{a} + \bar{c}$.
Вариант 2. **1.** 29 см^2. **2.** $\overline{AD} = 2\bar{b}$; $\overline{DC} = -2(\bar{b} + \bar{c})$; $\overline{BE} = \bar{c} - \bar{a}$.
Вариант 3. **1.** 29,25 см^2. **2.** $\overline{FA} = \bar{a}$; $\overline{AD} = 2(-\bar{a} + \bar{c})$;
$\overline{DC} = 2(\bar{a} - \bar{c} - \bar{b})$.
Вариант 4. **1.** 24,75 см^2. **2.** $\overline{AB} = 2\bar{b}$; $\overline{CD} = -2\bar{a}$; $\overline{DA} = 2\bar{c}$;
$\overline{DB} = 2(\bar{b} + \bar{c})$.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

К — 1

Вариант 1. **1.** (ACD), (ABD). **2.** ME. **3.** 8 см.
Вариант 2. **1.** (MDC), (MDB), (MDA), (AMC). **2.** AM. **3.** 14 см.
Вариант 3. **1.** (MDC), (MDB), (MDA), (AMB). **2.** KE. **3.** 10 см.
Вариант 4. **1.** (AMB), (MDB), (AMC), (MBC). **2.** a. **3.** 12 см.

К — 2

Вариант 1. **1.** Параллельны. **3.** Да.
Вариант 2. **1.** Параллельны. **3.** Нет.
Вариант 3. **1.** Параллельны. **3.** Нет.
Вариант 4. **1.** Параллельны. **3.** Да.

К — 3

Вариант 1. **1.** $3\sqrt{5}$ см. **2.** $13{,}5\sqrt{3}$ см^2.
Вариант 2. **1.** 10 см. **2.** 60 см^2.
Вариант 3. **1.** 2 см. **2.** 120 см^2.
Вариант 4. **1.** $5\sqrt{6}$ см. **2.** $15\sqrt{6}$ см^2.

К — 4

Вариант 1. **1.** $\overline{BH}$. **2.** $\overline{DA} = -2(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$. **3.** D (23; 0; 0).
Вариант 2. **1.** $\overline{BO}$. **2.** $\overline{DB} = 2(\bar{a} - \bar{b} - \bar{c})$. **3.** D (0; 17; 0).
Вариант 3. **1.** $\overline{BH}$. **2.** $\overline{CB} = 2(\bar{b} - \bar{a})$. **3.** D (0; 0; 2,8).
Вариант 4. **1.** $\overline{BO}$. **2.** $\overline{BC} = 2(\bar{a} - \bar{b} - \bar{c})$. **3.** D (–37; –37; 0).

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Панчищина Валентина Алексеевна

ГЕОМЕТРИЯ

Дидактические материалы

10 класс

Пособие для общеобразовательных организаций

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *И. В. Рекман*
Младший редактор *Е. В. Трошко*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика *И. В. Губина*
Технический редактор и верстальщик *Т. А. Зеленская*
Корректоры *Т. С. Крылова, А. В. Рудакова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93–953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 1.10.13. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура SchoolBookCSanPin. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 2,25. Тираж 5000 экз. Заказ № 4141ПТ.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано по заказу ОАО «ПолиграфТрейд» в филиале «Тверской полиграфический комбинат детской литературы» ОАО «Издательство «Высшая школа». 170040, г. Тверь, проспект 50 лет Октября, 46. Тел.: +7(4822) 44-85-98. Факс: +7(4822) 44-61-51.