20
Янв 2017

База ЕГЭ Задание 19

Решение всех прототипов задания 19 (база ЕГЭ).

Задача 1366. *Найдите шестизначное натуральное число, которое записывается только цифрами 2 и 0 и делится на 24. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.*

Решение скрыть

Искомое натуральное число делится на 24, следовательно, оно делится на 3 и на 8.

Число делится на 3, если сумма его цифр кратна 3.

Число делится на 8, если три его последние цифры делятся на 8 или являются нулями.

Чтобы искомое число делилось на 3, оно должно состоять из шести цифр 2, или из трех цифр 2 и трех цифр 0.

222 не делится на 8, поэтому первый вариант нас не устраивает.

Значит искомое число состоит трех цифр 2 и трех цифр 0.

На 8 в этом случае делится, например, такое число: 222000

Ответ: 222000

Задача 1376. *Найдите трехзначное натуральное число, которое при делении на 4, на 5 и на 6 дает в остатке 2 и все цифры которого четные. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.*

Решение скрыть

Сначала найдем число, которое делится на 4, на 5 и на 6.

Если число делится на 5, то его последняя цифра 0 или 5.

Если число делится на 4, то две его последние цифры образуют число, которое делится на 4, или две его последние цифры нули.

Если число делится на 6, то оно делится на 2 и на 3, так как $6 = 2 \cdot 3$.

Если число делится на 2, то его последняя цифра - четная. И если число делится на 3, то сумма его цифр делится на 3.

Тогда для двух последних цифр искомого числа существуют такие варианты:

	0	0
	2	0
	4	0
	6	0
	8	0

Так как сумма цифр числа делится на 3, и все цифры четные, получаем такие варианты для первой цифры:

6	0	0
4	2	0
2	4	0
8	4	0
6	6	0
4	8	0

Далее. По условию искомое число при делении на 4, на 5 и на 6 дает в остатке 2. Это значит, что если из искомого числа вычесть 2, то мы получим число, которое делится без остатка на 4, на 5 и на 6. То есть чтобы получить искомое число, нужно к числам, записанным в таблице прибавить 2.

Таким образом, искомым числом может быть одно из следующих:

6	0	2
4	2	2
2	4	2
8	4	2
6	6	2
4	8	2

Ответ: 602 или 422 или 242 или 842 или 662 или 482.

Задача 1398. *Вычеркните в числе 181615121 три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 12. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.*

Решение скрыть

Так как искомое число делится на 12, следовательно, оно делится на 4 и на 3 ($12 = 4 \cdot 3$).

Следовательно, две его последние цифры образуют число, которое делится на 4, или две его последние цифры нули (признак делимости на 4). И сумма его цифр делится на 3 (признак делимости на 3).

Таким образом, точно нужно вычеркнуть последнюю цифру, чтобы две последние цифры образовывали число 12, которое делится на 4:

18161512~~1~~

Теперь нужно вычеркнуть еще две цифры так, чтобы сумма цифр числа делилась на 3. Сумма всех оставшихся цифр равна $1+8+1+6+1+5+1+2=25$ Ближайшие числа, которые делятся на 3 это24, 21, 18, 15.

Получить 24 не получится, так как $24=25-1$ - нужно вычеркнуть только одну цифру 1, а нужно вычеркнуть две.

Чтобы получить 21 нужно из 25 вычесть 4 - это также не получится сделать, зачеркнув две цифры.

Чтобы получить 18 нужно из 25 вычесть 7. $7=6+1$. Значит, нужно вычеркнуть цифру 6 и цифру 1.

То есть так:

~~1~~81~~6~~1512~~1~~

или так:

18~~16~~1512~~1~~

или так:

181~~61~~512~~1~~

Аналогичным образом можно попробовать получить сумму цифр 15, 12 и т.д.

Но нам достаточно того, что получилось.

Ответ: 811512 или 181512.

Задача 6089.   *Найдите трехзначное число A, обладающее следующими свойствами:*

- *Сумма цифр числа делится на 6*
- *Сумма цифр числа $A+3$ делится 6*
- *Число A больше 350 и меньше 400*

В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Решение скрыть

Легко проверить, что если последняя цифра числа меньше 7, то сумма цифр числа $A+3$ будет на 3 больше, чем сумма цифр числа A. В этом случае, поскольку по условию сумма цифр числа делится A делится на 6, сумма цифр числа $A+3$ не будет делить на 6.

Следовательно, последняя цифра числа должна быть больше или равна 7.

Рассмотрим числа в интервале от 350 до 400, последняя цифра которых больше или равна 7.

Проверим число 357. Сумма цифр не делится на 6.

Проверим число 358. Сумма цифр не делится на 6.

Проверим число 359. Сумма цифр не делится на 6.

Проверим число 367. Сумма цифр не делится на 6.

Проверим число 368. Сумма цифр не делится на 6.

Проверим число 369. Сумма цифр делится на 6. $369+3=372$ - сумма цифр также делится на 6.

Итак, искомое число 372.

Ответ: 372.

Задача 6100. *Найдите четырехзначное число, кратное* 15*, произведение цифр которого больше* 35 *но меньше* 45*. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.*

Решение скрыть

Если число кратно 15, то оно делится на 3 и на 5 ($15=3\cdot 5$)

Если число делится на 5, то его последняя цифра 0 или 5.

Последняя цифра не может быть 0, так как в этом случае произведение цифр будет равно нулю. Следовательно, последняя цифра равна 5.

Отсюда произведение трех оставшихся цифр больше чем $35:5=7$ и меньше чем $45:5=9$.

Итак, у нас есть произведение трех цифр, которое больше чем 7 но меньше чем 9. Следовательно, произведение трех первых цифр равно 8.

Тогда возможные варианты искомого числа (порядок первых трех цифр произвольный):

1185

1245

Кроме того, поскольку искомое число еще делится на 3, сумма всех цифр числа, включая последнюю цифру 5 делится на 3.

Сумма цифр числа *1245* делится на 3.

Следовательно, искомое число равно 1245. (Также нам подойдут все числа, полученные из числа 1245 перестановкой первых трех цифр.)

Ответ: 1245.

Задача 6112. *Найдите четырехзначное число, кратное 12, произведение цифр которого равно 10. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.*

Решение скрыть

Если число кратно 12, то оно делится на 4 и на 3.

Следовательно, две его последние цифры образуют число, которое делится на 4, или две его последние цифры нули (признак делимости на 4). И сумма его цифр делится на 3 (признак делимости на 3).

Последние цифры не могут быть нулями, так как в этом случае произведение цифр будет равно нулю.

Число 10 раскладывается на множители двумя способами:

$10=1\cdot 10$ - этот вариант нам не подходит, так как 10 не является цифрой.

$10=2\cdot 5.$

Следовательно, число 10 можно представить в виде произведения четырех множителей как $10=1\cdot 1\cdot 2\cdot 5$.

Таким образом, число, которое мы ищем записывается цифрами $1,\ 1,\ 2,\ 5$, сумма которых равна 9. Следовательно число, записанное этими цифрами делится на 3.

Две последние цифры должны составлять число, которое делится на 4 - это может быть 12 или 52.

Таким образом, получим числа

1512 (или 5112)

или

1152

Ответ: 1512 или 5112 или 1152.

Задача 6123. *Найдите четырехзначное число, кратное 44, любые две соседние цифры которого отличаются отличаются на 1. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.*

Решение скрыть

Если число кратно 44, то оно делится на 4 и на 11.

Следовательно, две его последние цифры образуют число, которое делится на 4, или две его последние цифры нули (признак делимости на 4). Последние две цифры не могут быть нулями, так как по условию любые две соседние цифры числа отличаются отличаются на 1.

Число делится на 11, если сумма цифр, стоящих на четных местах равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах, или разность этих сумм кратна 11. (Признак делимости на 11).

Последними двумя двумя цифрами могут быть, например, 12 или 32 - числа 12 и 32 делятся на 4 и цифры, составляющие эти числа отличаются на 1.

Тогда это могут быть, например, числа

3212

или

1232

В обоих числах суммы цифр стоящих на четных и нечетных местах равны 4.

также подходят числа 1012, 3432, 5456, 5676.

Ответ: 3212, 1232, 1012, 3432, 5456, 5676.

Задача 6134. *Найдите четырехзначное число, кратное 66, все цифры которого различны и четны. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.*

Решение скрыть

Если число кратно 66, то оно делится на 2, на 3 и на 11.

Следовательно, его последняя цифра четная, сумма цифр делится на 3, сумма цифр, стоящих на четных местах равна сумме цифр стоящих на нечетных местах, или разность этих сумм кратна 11.

Последнее невозможно, так как все цифры четные.

Так как сумма цифр, стоящих на четных местах равна сумме цифр стоящих на нечетных местах и сумма всех цифр делится на 3, каждая сумма делится на 3.

Этим условиям удовлетворяют, например, числа:

6402

6204

4620

2640

2046

4026

Ответ: *6402, 6204, 4620, 2640, 2046, 4026*

Задача 6176. Найдите трехзначное число, кратное 70, все цифры которого различны, а сумма квадратов цифр делится на 5, но не делится на 25. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Решение скрыть

Если число кратно 70, то оно делится на 7, и на 10.

Следовательно, последняя цифра - 0.

Выпишем трехзначные числа, кратные 70:

140, 210, 280, 350, 420, 490, 560, 630, 700, 770, 840, 910, 980.

Вычеркнем содержащие одинаковые цифры:

140, 210, 280, 350, 420, 490, 560, 630, ~~700~~, ~~770~~, 840, 910, 980.

Сумма квадратов цифр делится на 5, но не делится на 25 у чисел 210, 420, 630, 840, 980

Ответ: 210, 420, 630, 840, 980

Задача 6186. *Найдите трехзначное натуральное число, большее 400 но меньшее 650, которое делится на каждую свою цифру, и все цифры которого различны и не равны нулю. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.*

Решение скрыть

Так как число больше 400 но меньше 650, первой цифрой числа могут быть цифры 4, 5 или 6.

Рассмотрим случай, когда первая цифра 4. Тогда число делится на 4, следовательно две его последние цифры образуют число, которое делится на 4. Если число делится на 4, оно также делится на 2.

Кроме того, любое число делится на 1.

Из этих соображений нам подойдет число 412.

Ответ: например, 412.

Задача 6198. *Найдите трехзначное натуральное число большее 500, которое при делении на 5 и на 8 дает равные ненулевые остатки и средняя цифра которого является средним арифметическим крайних цифр. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.*

Решение скрыть

Найдем числа, которые делятся без остатка на 5 и на 8. Так как 5 и 8 взаимно простые числа, искомое число за вычетом остатка должно делиться на 40.

Так как искомое число за вычетом остатка делится на 4 и оканчивается на 0, вторая цифра числа обязательно четная.

Чтобы получить искомое число, нужно к числу, которое делится на 40 без остатка прибавить остаток.

Остатком от деления на 5 могут быть числа 1, 2, 3, 4. Следовательно, остаток от деления искомого числа на 5 и на 8 может быть одним из этих чисел.

Пусть первая цифра числа равна 5. Чтобы получить четную цифру на втором месте, остаток должен быть нечетным.

Тогда возможны варианты:

531 (остаток 1)

543 (остаток 3)

Вычтем остаток из этих чисел и проверим, делятся ли полученные числа на 40 без остатка. Ни 530, ни 540 на 40 не делятся.

Пусть первая цифра равна 6. Тогда, чтобы получить четную цифру на втором месте, остаток должен быть четным.

Возможны варианты:

642 (остаток 2)

654 (остаток 4)

Вычтем остаток из этих чисел и проверим, делятся ли полученные числа на 40 без остатка. Число 640 делится на 40 без остатка.

Можно продолжить эти рассуждения и получит другие числа.

Ответ: 642.

Задача 6220. *Найдите трехзначное натуральное число, кратно 4, сумма цифр которого равна их произведению. В ответе укажите како-нибудь одно такое число.*

Решение скрыть

Сумма трех цифр равна их произведению, например, в том случае, если это цифры 1, 2, 3.

Составим из этих цифр число, которое делится на 4. Две последние цифры этого числа должны образовать число, которое делится на 4. Это может быть 12 или 32. В таком случае искомым числом может быть одно из чисел 321 или 132.

Ответ: 312, 132.

Задача 9600. *Цифры четырехзначного числа, кратного 5, записали в обратном порядке. Затем из первого числа вычли второе и получили 1458. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.*

Решение скрыть

Если число делится кратно 5, то его последняя цифра 0 или 5. 0 не может быть последней цифрой, так в этом случае при записи числа в обратном порядке получим трехзначное число.

Итак, последняя цифра искомого числа 5 и мы имеем такую ситуацию: