



Эдуард Николаевич Балаян

профессор РАЕ, Заслуженный работник высшей школы, почетный доктор наук (HONORIS CAUSA), кандидат наук по математике, автор более 100 книг. Имел большую педагогическую деятельность, в том числе в специализированном математическом лицее. Его выпускники ныне работают в Российской Федерации, странах СНГ, дальнего и ближнего зарубежья. С большой гордностью вспоминая его увлеченные уроки.

За многолетний педагогический труд, большой личный вклад в разработку учебно-методических материалов по математике награжден медалью им. В.И. Вернадского, почетной грамотой МО и науки РФ и другими наградами.

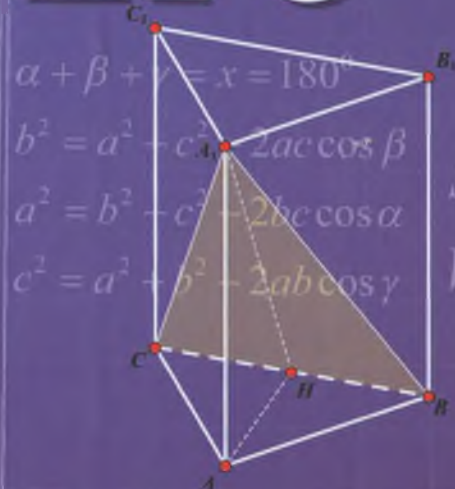
В настоящее время работает на факультете менеджмента в ДГУ (Донецком государственном техническом университете (ДГТУ)).

ФЕНИКС



МАТЕМАТИКА Задачи типа 14

ЕГЭ



$$\alpha + \beta + \gamma = x = 180^\circ$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$S = Ph$$

$$V = S \cdot h$$



Э.Н. БАЛАЯН

МАТЕМАТИКА

Задачи типа 14

Геометрия. Стереометрия
(профильный уровень)

- Краткая теория
- Задачи с решениями
- Задачи для самостоятельного решения
- Ответы ко всем задачам

УДК 373.167.1:51

ББК 22.1я72

КТК 444

Б20

Балаян Э.Н.

Б20 Математика. Задачи типа 14 (С2). Геометрия. Стереометрия (профильный уровень) / Э.Н. Балаян. — Ростов н/Д: Феникс, 2016. — 254 с. : ил. — (Большая перемена).

ISBN 978-5-222-26810-0

Предлагаемая вниманию старшеклассников книга содержит более 800 разноуровневых задач типа 14 (С2) по стереометрии для подготовки к ЕГЭ, из которых около 150 приводятся с подробными решениями и обоснованиями.

Эти задачи не только помогут учащимся углубить свои знания, проверить и закрепить практические навыки при систематическом изучении курса стереометрии, но и предоставят прекрасную возможность для самостоятельной эффективной подготовки к успешной сдаче ЕГЭ и вступительных экзаменов по математике.

Для удобства пользования книгой приводятся краткие теоретические сведения и необходимые справочные материалы.

В заключительной части книги даны решения задач с помощью метода координат.

Пособие предназначено для старшеклассников, учителей математики, студентов математических факультетов — будущих учителей, методистов и репетиторов.

УДК 373.167.1:51

ISBN 978-5-222-26810-0

ББК 22.1я72

© Балаян Э.Н., 2016

© Оформление, ООО «Феникс», 2016

Предисловие

Предлагаемая вниманию старшеклассников и учителей математики книга продолжает серию книг для подготовки к ЕГЭ по математике.

Настоящая книга посвящена задаче 14 (С2) по стереометрии. Не секрет, что геометрические задачи вызывают у учащихся и абитуриентов неподдельный страх и наибольшие затруднения. Достаточно отметить, что многие абитуриенты, как правило, обходят решения геометрических задач на ЕГЭ. Трудности вызывают прежде всего выполнение чертежа, построение, не говоря уже о трудностях при нахождении идеи решения.

Книга состоит из четырех разделов.

В первом разделе для удобства пользования книгой приводятся краткие теоретические сведения по курсу стереометрии, сопровождаемые необходимыми определениями, свойствами и справочными материалами.

Изложение материала сжатое, в конспективной форме, но достаточное, чтобы им мог пользоваться не только старшеклассник, но и тот, кто незнаком с каким-либо разделом, и тот, кто окончил школу ранее и изрядно позабыл материал.

Во втором разделе приводятся 700 задач для самостоятельного решения на нахождение углов и расстояний в пространстве, которые развивают геометрические представления, лежащие в основе решения любых задач по стереометрии.

В третьем разделе автором собраны разные задачи на многогранники и фигуры вращения. В конце раздела приводятся задачи, решаемые с помощью метода координат.

В заключительном, четвертом, разделе приводятся подробные решения к наиболее трудным задачам.

Ко всем задачам в конце книги даны ответы, что дает возможность проверить правильность решенной задачи.

В дополнение к этой книге и для основательной подготовки к урокам и ЕГЭ автор настоятельно рекомендует использовать вышедшие в издательстве «Феникс» книги автора: «Геометрия. Задачи на готовых чертежах для подготовки к ЕГЭ. 10–11 классы», 2015; «Новый репетитор по геометрии для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ. 7–11 классы», 2015; «Тренировочные упражнения по математике для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ (профильный уровень)», 2015.

Раздел I

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО КУРСУ СТЕРЕОМЕТРИИ ДЛЯ X–XI КЛАССОВ

При решении задач по стереометрии возрастают требования к качеству чертежа и его наглядности.

Освоение принципов и техники построения пространственного чертежа — необходимое условие для успешного решения задач.

Пространственные тела можно условно разделить на удобные для пространственного изображения и неудобные. К первой категории относятся многогранники: параллелепипед, треугольная призма, треугольная и четырехугольная пирамида. Все остальные будем считать неудобными для изображения.

В некоторых случаях при решении задач можно вообще обойтись одним плоским чертежом или несколькими (в случае необходимости) и не строить пространственное изображение.

Основным средством решения задач является аналитический метод.

§1. Многогранники

К этому разделу отнесем два основных типа задач:

- 1) задачи на вычисление;
- 2) задачи на сечения.

К задачам на вычисление относятся те, где требуется найти линейные элементы правильных призм и пирамид, а именно: сторону основания, боковое ребро, апофему и т. д., далее угловые элементы: двугранные углы при основании, линейные углы при вершине; площади: боковой поверхности, полной поверхности, основания.

В основе второго типа задач — задач на построение лежит умение построить сечение данного многогранника плоскостью и определить вид этого сечения. В задачах этого типа сечение задается точкой и прямой, тремя точками, двумя точками и прямой, параллельной плоскостью сечения и т. д.

Многогранником называется тело, граница которого состоит из многоугольников.

Эти многоугольники называются **гранями**, их стороны — **ребрами**, а вершины — **вершинами** многоугольника.

Отрезки, соединяющие две вершины, не лежащие на одной грани, называются **диагоналями** многогранника.

Многогранники бывают **выпуклые** и **невыпуклые**.

Если многогранник целиком расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани, то он называется **выпуклым**.

Например, тетраэдр, октаэдр, параллелепипед — выпуклые многогранники.

Все грани выпуклого многогранника являются выпуклыми многоугольниками.

В выпуклом многограннике сумма всех плоских углов при каждой его вершине меньше 360° .

1. Призма

Призмой (рис. 1) называется многогранник, у которого две грани $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ (основания призмы) — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани (AA_1B_1B ; BB_1C_1C и т. д.) — параллелограммы, плоскости которых параллельны одной прямой (AA_1 , BB_1 и т. д.).

Параллелограммы AA_1B_1B , BB_1C_1C и т. д. называются **боковыми гранями**, а ребра AA_1 , BB_1 и т. д. называются **боковыми**.

Перпендикуляр FF_1 , опущенный из любой точки одного основания на плоскость другого, называется **высотой** призмы.

Если в основании призмы лежит треугольник, четырехугольник и т. д., то призма называется соответственно **треугольной**, **четырёхугольной** и т. д.

Призма называется **прямой**, если боковые ребра перпендикулярны к основаниям, в противном случае призма называется **наклонной**.

Если в прямой призме основание — правильный многоугольник, то призма называется **правильной**.

У правильной призмы все боковые грани — **равные прямоугольники**.

Сечение, которое образовано плоскостью, перпендикулярной боковому ребру призмы, называется **перпендикулярным сечением** (см. рис. 1).

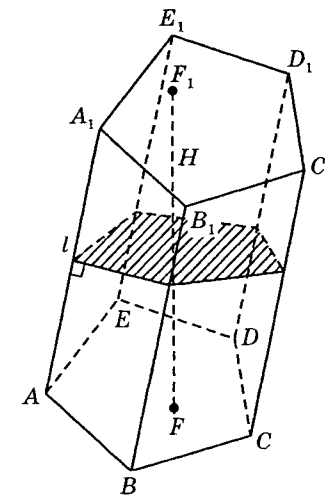


Рис. 1

Произвольная призма

$$S_{\text{бок.}} = P_{\text{сеч.}} \cdot l; \quad V = S_{\text{осн.}} \cdot H; \quad V = S_{\text{сеч.}} \cdot l;$$

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}$$

Прямая призма

$$S_{\text{бок.}} = P \cdot H; \quad S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}; \quad V = S_{\text{осн.}} \cdot H.$$

Замечание. Для произвольного параллелепипеда справедливы те же формулы.

2. Параллелепипед

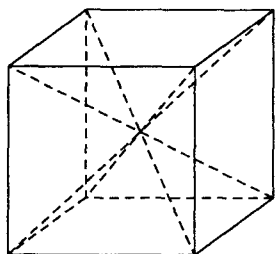


Рис. 2

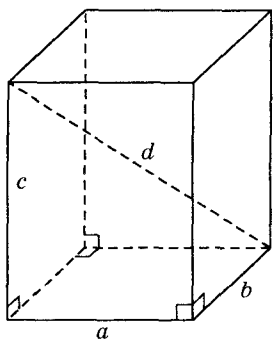


Рис. 3

Параллелепипедом называется призма, основание которой — параллелограмм (рис. 2).

У параллелепипеда 6 граней и все они параллелограммы.

Противоположные грани попарно равны и параллельны.

Параллелепипед имеет 4 диагонали, которые пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

Любая грань параллелепипеда может быть принята за основание.

Параллелепипед, у которого боковые грани — прямоугольники, называется **прямым**.

Прямой параллелепипед, у которого все грани — прямоугольники, называется **прямоугольным** (рис. 3).

Прямоугольный параллелепипед, у которого все грани квадраты, называется **кубом**.

Прямоугольный параллелепипед (см. рис. 3):

$$S_{\text{бок.}} = P \cdot H = 2(a + b)c; \quad V = abc;$$

$$S_{\text{полн.}} = 2(ab + bc + ac); \quad d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Куб

Если a — ребро куба, то

$$V = a^3; \quad d = a\sqrt{3}; \quad S_{\text{полн.}} = 6a^2.$$

3. Пирамида

Пирамидой называется многогранник, у которого одна грань — **основание пирамиды** — произвольный многоугольник $ABCDE$ (рис. 4), а остальные **боковые грани** — треугольники с общей вершиной M .

Перпендикуляр MO , опущенный из вершины на основание, называется **высотой пирамиды**.

Если в основании пирамиды треугольник, четырехугольник и т. д., то пирамида называется **треугольной**, **четырёхугольной** и т. д.

Треугольная пирамида называется **тетраэдром** (четырёхгранником).

Если в основании пирамиды лежит правильный многоугольник, а высота проектируется в центр основания, то пирамида называется **правильной** (рис. 5).

В правильной пирамиде все боковые ребра равны, все боковые грани — равнобедренные треугольники.

Высота боковой грани MD называется **апофемой** правильной пирамиды.

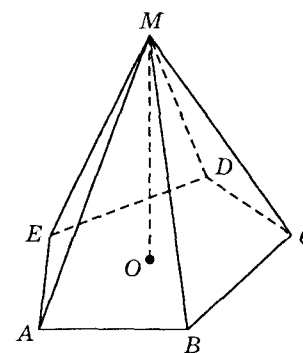


Рис. 4

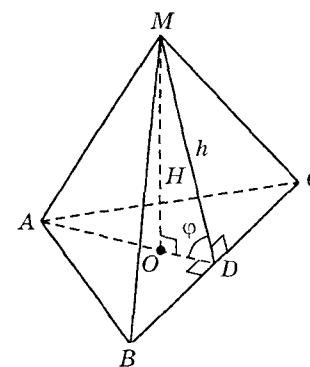


Рис. 5

Произвольная пирамида

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}}; \quad V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H.$$

Правильная пирамида (рис. 5)

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} P \cdot h; \quad S_{\text{бок.}} = \frac{S_{\text{осн.}}}{\cos \varphi};$$

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}}; \quad V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H.$$

Если в пирамиде провести сечение, параллельное основанию, то часть пирамиды, заключенная между секущей плоскостью и основанием, называется **усеченной пирамидой** (рис. 6).

Параллельные грани усеченной пирамиды (ABC и $A_1B_1C_1$) называются ее **основаниями**; расстояние между ними (OO_1) — **высотой**.

Усеченная пирамида называется **правильной**, если пирамида, из которой она получена, была правильной.

Все боковые грани правильной усеченной пирамиды — равные равнобедренные трапеции.

Высота боковой грани называется **апофемой** правильной усеченной пирамиды.

Произвольная усеченная пирамида

$$V = \frac{H}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}).$$

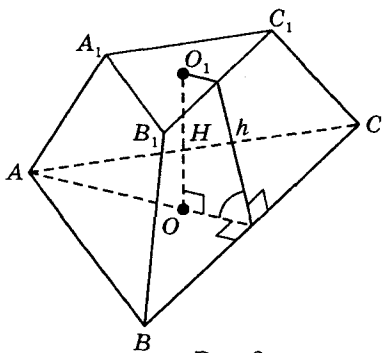
Правильная усеченная пирамида (рис. 6)

Рис. 6

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} (P_1 + P_2),$$

где P_1, P_2 — периметры оснований.

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_1 + S_2,$$

где S_1, S_2 — площади оснований.

4. Дополнительные соотношения между элементами призмы и пирамиды

1. Если в пирамиде $MA_1A_2...A_n$ все боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы (рис. 7), длины всех боковых ребер равны, то вершина M пирамиды проецируется в центр окружности, описанной около основания пирамиды (эта точка O является также точкой пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам основания пирамиды).

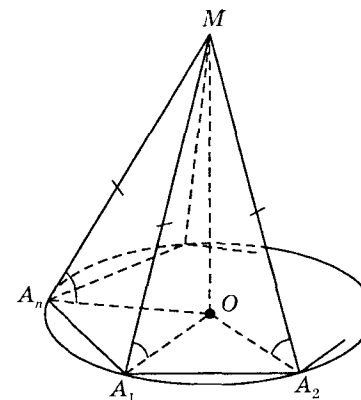


Рис. 7

2. Если в пирамиде $MA_1A_2...A_n$ все боковые грани образуют с основанием равные углы и длины всех апофем боковых граней равны, то вершина M пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды. Эта точка является также точкой пересечения биссектрис углов в основании пирамиды (рис. 8).

3. Если высота треугольной пирамиды $MABC$ проходит через точку пересечения высот $\triangle ABC$, лежащего в основании, то противоположные ребра пирамиды перпендикулярны, т. е. $AM \perp BC$, $MC \perp AB$ и $MB \perp AC$. Справедливо и обратное утверждение (рис. 9).

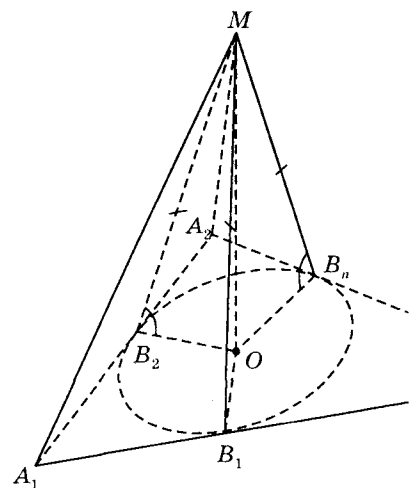


Рис. 8

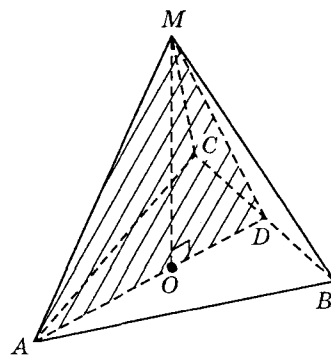


Рис. 9

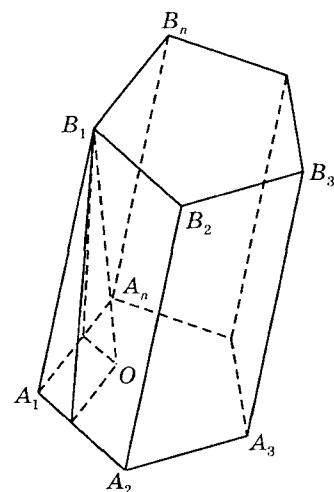


Рис. 10

4. Если MO — высота пирамиды $MAVC$ и $MA \perp BC$, то $(MAO) \perp BC$ (рис. 9).

5. Если в наклонной призме $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$ боковое ребро A_1B_1 составляет равные углы со сторонами основания, образующими вершину A_1 , то точка O основания высоты B_1O лежит на биссектрисе $\angle A_1$ (рис. 10).

§2. Круглые тела

Заметим, что круглые тела по сравнению с многогранниками относительно трудно поддаются изображению. Это замечание прежде всего относится к шару. По этой причине при решении стереометрических задач, как правило, сам

шар (а тем более шары) стараются не изображать, так как многие задачи на круглые тела сводятся к задачам планиметрии.

При решении задач, связанных с цилиндром, используются такие понятия, как высота, образующая, радиус основания, осевое сечение, основание, поверхность (боковая и полная) и соответственно параметры: площадь осевого сечения, площадь боковой и полной поверхностей, площадь основания, объем цилиндра, радиус основания.

Что касается прямого кругового конуса (или просто конуса), то здесь добавляются угол при вершине осевого сечения и угол наклона образующей конуса к плоскости основания.

1. Цилиндр

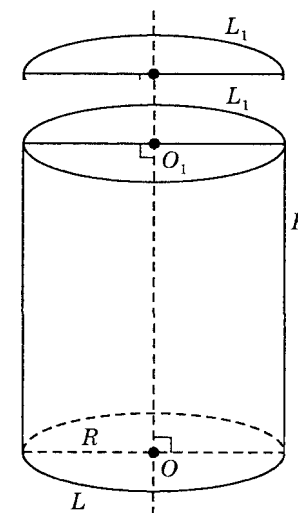
Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами с границами L и L_1 , называется цилиндром (рис. 11).

Цилиндрическая поверхность называется **боковой поверхностью цилиндра**, а круги — **основаниями цилиндра**.

Образующие цилиндрической поверхности называются **образующими цилиндра**, а длина образующей — **высотой цилиндра**.

Прямая OO_1 называется **осью цилиндра**.

Всякое сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра, представляет собой **прямоугольник**, у которого две стороны — образующие, а две дру-



гие — диаметры оснований цилиндра, а само сечение называется **осевым**.

Всякое сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной к оси, является **кругом**.

$$S_{\text{бок.}} = 2\pi RH; \quad S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}};$$

$$S_{\text{полн.}} = 2\pi R(R + H); \quad V = \pi R^2 H.$$

2. Конус

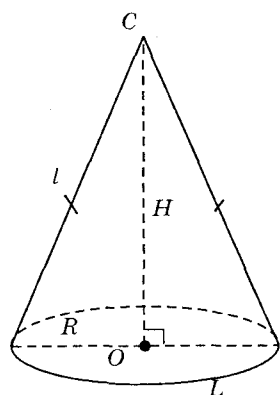


Рис. 12

Конусом называется тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей L (рис. 12).

Коническая поверхность называется **боковой поверхностью** конуса, а круг — **основанием** конуса.

Точка C — **вершина** конуса, а образующие конической поверхности — **образующие** конуса.

Прямая OC называется **осью** конуса, а отрезок OC называется

высотой конуса.

Заметим, что конус может быть получен вращением прямоугольного треугольника вокруг любого катета, при этом боковая поверхность конуса образуется вращением гипотенузы, а основание — вращением катета.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через ось конуса, называется **осевым**.

$$S_{\text{бок.}} = \pi Rl; \quad S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}};$$

$$S_{\text{полн.}} = \pi R(R + l); \quad V = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

Если конус пересечь плоскостью, перпендикулярной к его оси, то та часть конуса, которая заключена

между секущей плоскостью и основанием, называется **усеченным конусом** (рис. 13).

Отрезок, соединяющий центры оснований, называется **высотой** усеченного конуса.

Часть конической поверхности, ограничивающая усеченный конус, называется его **боковой поверхностью**, а отрезки образующих конической поверхности, заключенные между основаниями, называются **образующими** усеченного конуса.

Усеченный конус может быть получен вращением прямоугольной трапеции вокруг ее боковой стороны, перпендикулярной основаниям.

$$S_{\text{бок.}} = \pi l(R + r); \quad S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_1 + S_2; \quad S_1 = \pi R^2;$$

$$S_2 = \pi r^2; \quad V = \frac{\pi H}{3} (R^2 + Rr + r^2).$$

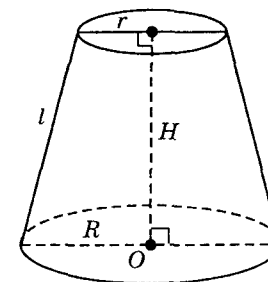


Рис. 13

3. Шар

Шаровой, или **сферической**, **поверхностью** (или просто **сферой**) называется геометрическое место точек пространства, равноудаленных от одной точки — **центра** шара (точка O , рис. 14).

Тело, ограниченное шаровой поверхностью, называется **шаром**.

Шар можно получить вращением полукруга (или круга) около его диаметра.

Сечение шара плоскостью, проходящей через центр O , представляет собой наибольший круг.

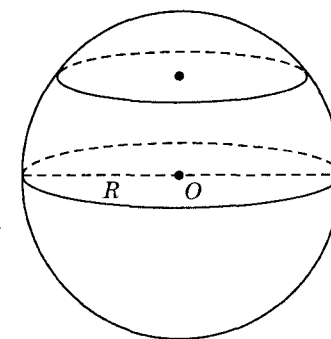


Рис. 14

Если плоскость имеет со сферой только одну общую точку, то она называется **касательной плоскостью к сфере**, а их общая точка — **точкой касания** плоскости и сферы.

Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости. Верно и обратное.

Многогранник называется **описанным около сферы** (шара), если сфера касается всех его граней. При этом сфера называется **вписанной в многогранник**.

Многогранник называется **вписанным в сферу**, если все его вершины лежат на сфере. При этом сфера называется **описанной около многогранника**.

$$S_{\text{шара}} = 4\pi R^2 = \pi D^2; \quad V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3.$$

1. Шаровой сегмент (рис. 15).

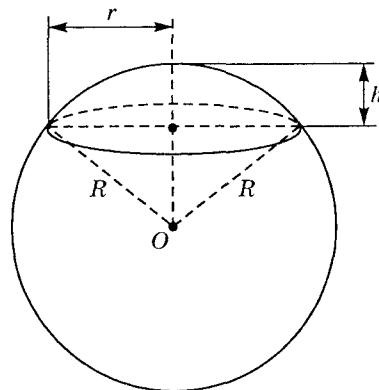


Рис. 15

Если S — площадь сферической поверхности сегмента, h — высота, V — объем, r — радиус основания, то

$$\begin{aligned} S &= 2\pi R h = \pi D h = \pi(r^2 + h^2); \\ S_{\text{полн.}} &= \pi(2R h + r^2) = \pi(h^2 + 2r^2); \\ V &= \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h\right). \end{aligned}$$

2. Шаровой сектор (рис. 15).

$$\begin{aligned} S &= \pi R(2h + r); \\ V &= \frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{6}\pi d^2 h. \end{aligned}$$

3. Шаровой пояс (рис. 16).

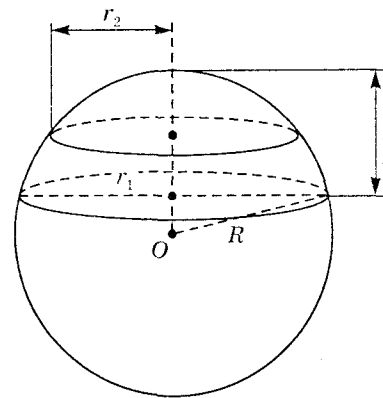


Рис. 16

Если h — высота шарового пояса, r_1 и r_2 — радиусы оснований, то

$$\begin{aligned} S_{\text{бок.}} &= 2\pi R h = \pi D h; \\ S &= \pi(2R h + r_1^2 + r_2^2); \\ V &= \frac{1}{6}\pi h(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2). \end{aligned}$$

§3. Векторы

Координаты вектора

1. Если $\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}$ — данные векторы, то вектор $\vec{a} + \vec{b}$ имеет координаты $\{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$.

2. Если $\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}$ — данные векторы, то вектор $\vec{a} - \vec{b}$ имеет координаты $\{x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\}$.

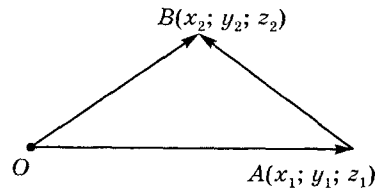
3. Если $\vec{a} \{x; y; z\}$ — данный вектор, α — данное число, то вектор $\alpha\vec{a}$ имеет координаты $\{\alpha x; \alpha y; \alpha z\}$.

Связь между координатами векторов и координатами точек

$$\vec{OB} \{x_2; y_2; z_2\}$$

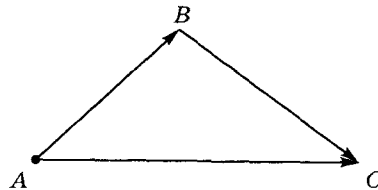
$$\vec{OA} \{x_1; y_1; z_1\}$$

Вектор $\vec{AB}$ имеет координаты $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$.



Каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.

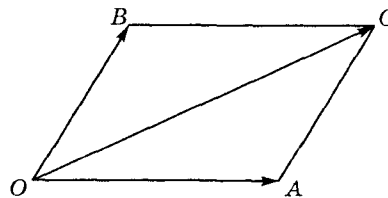
Правило треугольника



Для любых трех точек A, B и C имеет место равенство $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.

Правило параллелограмма

$$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}.$$



Правило многоугольника

$$\vec{A_1A_2} + \vec{A_2A_3} + \dots + \vec{A_{n-1}A_n} = \vec{A_1A_n},$$

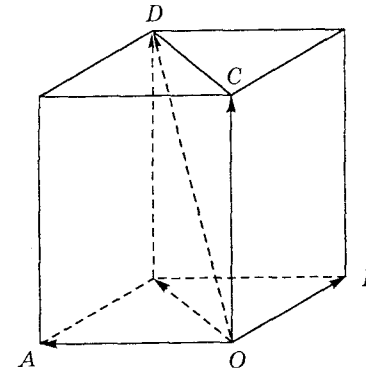
где $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ — произвольные точки.

Правило параллелепипеда

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OD}.$$

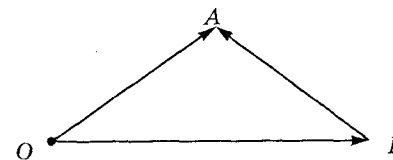
OD — диагональ параллелепипеда.

OA, OB, OC — ребра.



Разность векторов

$\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$, где A, B, O — произвольные точки.



Признак коллинеарности двух ненулевых векторов

$$\vec{b} = k\vec{a}, \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}, \quad \text{где } k \neq 0; \vec{a} \neq 0; \vec{b} \neq 0.$$

$$\vec{a} = (x_1; y_1; z_1), \quad \vec{b} = (x_2; y_2; z_2).$$

Признак компланарности трех векторов

Если вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. представить в виде $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где x, y — числа, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

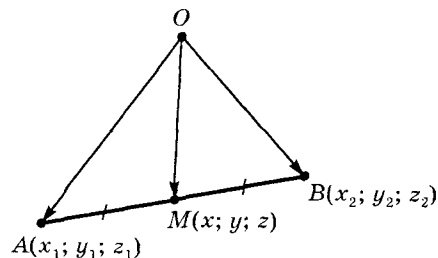
Середина отрезка

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

O — произвольная точка.

M — середина отрезка AB .

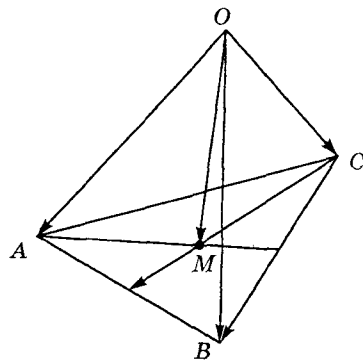
$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

**Точка пересечения медиан треугольника**

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

O — произвольная точка пространства.

M — точка пересечения медиан $\triangle ABC$.

**Скалярное произведение векторов**

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{ab})$$

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

где $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$.

Признак перпендикулярности двух векторов.

Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a}\vec{b} = 0$.

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0,$$

где $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$.

Умножение вектора на число

$p\vec{a} = (px; py; pz)$, где p — число, $\vec{a} = (x; y; z)$.

Длина вектора

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \text{ где } \vec{a} = (x; y; z).$$

Угол между ненулевыми векторами

$$\cos \alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Расстояние между точками.

Если $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, то

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Уравнение сферы.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2,$$

где (a, b, c) — координаты центра, R — радиус.

Если $a = b = c = 0$, то $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ — уравнение сферы с центром в начале координат.

Уравнение прямой, проходящей через две точки

$A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Угол между плоскостями.

Если φ — угол между плоскостями, заданными уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, то

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Расстояние от точки до плоскости.

Если d — расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, то

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Раздел II

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

§ 1. Угол между двумя прямыми**Куб**

В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми:

- | | |
|------------------------|-------------------------|
| 1. AC и BD ; | 10. A_1C и AD ; |
| 2. CC_1 и AD ; | 11. A_1B и AC ; |
| 3. AA_1 и B_1C ; | 12. AC и B_1D_1 ; |
| 4. BB_1 и A_1C ; | 13. A_1B и CB_1 ; |
| 5. A_1C и DC_1 ; | 14. B_1C и BD_1 ; |
| 6. AD_1 и A_1B ; | 15. AB и CA_1 ; |
| 7. DC_1 и D_1B_1 ; | 16. BA_1 и B_1D_1 ; |
| 8. AD_1 и BD ; | 17. AB_1 и BD_1 ; |
| 9. A_1C_1 и B_1C ; | 18. AB и DB_1 . |

Правильная треугольная призма

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми:

- | | |
|-------------------------|---|
| 19. AC и B_1C_1 ; | 24. AB_1 и A_1C ; |
| 20. AA_1 и B_1C ; | 25. AM и CN , где M и N — соответственно середины ребер A_1C_1 и B_1C_1 ; |
| 21. AC и BC_1 ; | 26. AB и CA_1 ; |
| 22. AC_1 и A_1B ; | 27. AB_1 и BC_1 . |
| 23. A_1C_1 и B_1C ; | |

Правильная шестиугольная призма

В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми:

- | | |
|-------------------------|-----------------------|
| 28. BB_1 и F_1E_1 ; | 41. BE_1 и AB_1 ; |
| 29. AA_1 и D_1E ; | 42. AC_1 и BE_1 ; |
| 30. CC_1 и FE_1 ; | 43. A_1C и AD_1 ; |
| 31. AA_1 и E_1C ; | 44. AD_1 и CF_1 ; |
| 32. AE_1 и EE_1 ; | 45. FD_1 и CE_1 ; |
| 33. CC_1 и BE_1 ; | 46. FC и AD_1 ; |
| 34. A_1B и E_1C ; | 47. AD и CF_1 ; |
| 35. AB_1 и D_1C ; | 48. AB и FE_1 ; |
| 36. AF_1 и DE_1 ; | 49. AB_1 и BC_1 ; |
| 37. AB_1 и F_1D ; | 50. AB_1 и DC_1 ; |
| 38. F_1C и AB_1 ; | 51. AB_1 и BD_1 ; |
| 39. A_1B и AD_1 ; | 52. BA_1 и DB_1 . |
| 40. AD_1 и F_1D ; | |

Правильный тетраэдр

В правильном тетраэдре $MABC$:

53. найдите угол между прямыми AB и CM ;
54. найдите угол между высотой MO и медианой BD боковой грани MBC ;
55. точка D — середина ребра CM . Найдите угол между прямыми BC и AD .

Правильная четырехугольная пирамида

В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1:

56. найдите угол между прямыми MO и BE , где E — середина ребра AM ;
57. точка E — середина ребра MC . Найдите угол между прямыми MA и BE .

Правильная шестиугольная пирамида

В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$:

58. все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми MA и BD ;
59. все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми MB и AD ;
60. стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между прямыми MC и BD ;
61. стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между прямыми MC и AD ;

62. стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между прямыми ME и CD .

§ 2. Угол между прямой и плоскостью

Куб

В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой:

63. A_1B и плоскостью BCC_1 ;
64. AB_1 и плоскостью ABC_1 ;
65. AB_1 и плоскостью ACC_1 ;
66. BB_1 и плоскостью A_1BC ;
67. DD_1 и плоскостью A_1BC_1 ;
68. A_1B и плоскостью ACD_1 ;
69. AC_1 и плоскостью BB_1D_1 ;
70. A_1C и плоскостью BCC_1 ;
71. AB_1 и плоскостью BC_1D ;
72. BD_1 и плоскостью BCC_1 ;
73. AB и плоскостью CB_1D_1 ;
74. A_1D_1 и плоскостью ACB_1 ;
75. DD_1 и плоскостью ACB_1 ;
76. AC и плоскостью BCD_1 ;
77. AA_1 и плоскостью BC_1D .

Правильная треугольная призма

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой:

78. BB_1 и плоскостью AB_1C_1 ;
79. AA_1 и плоскостью AB_1C_1 ;
80. BC и плоскостью ACC_1 ;
81. BC_1 и плоскостью ACC_1 ;
82. AC и плоскостью AB_1C_1 ;
83. CC_1 и плоскостью ACB_1 .

Правильная шестиугольная призма

В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой:

84. CC_1 и плоскостью ABC ;
85. AF_1 и плоскостью ABC ;
86. A_1C и плоскостью ABC ;
87. CF_1 и плоскостью ABC ;
88. BB_1 и плоскостью ABD_1 ;
89. AB_1 и плоскостью ABD_1 ;
90. EE_1 и плоскостью FCD_1 ;
91. CC_1 и плоскостью ACD_1 ;
92. AB_1 и плоскостью ABC_1 ;
93. AA_1 и плоскостью BD_1F ;
94. AB_1 и плоскостью ACE_1 ;
95. BC_1 и плоскостью BDE_1 ;
96. CD и плоскостью ABB_1 ;
97. FF_1 и плоскостью AED_1 ;
98. AA_1 и плоскостью BCE_1 ;
99. BC_1 и плоскостью AFF_1 ;
100. FC_1 и плоскостью BCE_1 .

Правильный тетраэдр

В правильном тетраэдре $MABC$, все ребра которого равны 1:

101. найдите угол между апофемой MD и плоскостью ABC ;

102. найдите угол между ребром MC и плоскостью ABC ;

103. точка D — середина ребра BM . Найдите угол между прямой AD и плоскостью ABC ;

104. найдите угол между медианой BD грани MBC и плоскостью MAB .

Правильная четырехугольная пирамида

В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между:

105. прямой AE и плоскостью MBC , где E — середина MD ;

106. прямой BD и плоскостью MBC ;

107. плоскостью, проходящей через точку D перпендикулярно AC .

Правильная шестиугольная пирамида

В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите синус угла между прямой:

108. AF и плоскостью MBC ;

109. BC и плоскостью MAB ;

110. MF и плоскостью MAB .

§ 3. Угол между двумя плоскостями

Куб

В кубе $A...D_1$ найдите углы между плоскостями:

111. ABC и ACC_1 ;

118. ABC_1 и BB_1D_1 ;

112. ACC_1 и BDD_1 ;

119. BDC_1 и ADD_1 ;

113. ABC и CDD_1 ;

120. AB_1D_1 и BA_1C_1 ;

114. ABC_1 и ABC ;

121. ABC и DA_1C_1 ;

115. ABC и ACD_1 ;

122. ABC_1 и BCD_1 ;

116. ABC и AB_1D_1 ;

123. BA_1C_1 и BA_1D_1 .

117. ABC_1 и AB_1C ;

Правильная треугольная призма

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями:

124. ACC_1 и BCC_1 ;

127. AB_1C и A_1BC_1 ;

125. ACC_1 и ABC ;

128. ABC и A_1CB_1 .

126. ABC и A_1BC ;

Правильная шестиугольная призма

В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями:

129. AFF_1 и DD_1E_1 ;

133. ACC_1 и AEE_1 ;

130. ABB_1 и AFF_1 ;

134. BFF_1 и DEE_1 ;

131. ABC и DEE_1 ;

135. ABC и ABD_1 ;

132. BFF_1 и BCC_1 ;

136. ABC и AB_1D_1 ;

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 137. ABC и BCD_1 ; | 141. ABC и DB_1F_1 ; |
| 138. ABC и BED_1 ; | 142. BCC_1 и AFF_1 ; |
| 139. BCD_1 и FED_1 ; | 143. AFF_1 и BDD_1 ; |
| 140. ABC и FBD_1 ; | 144. ABC и BFE_1 . |

Правильная четырехугольная пирамида

В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1:

145. найдите угол между плоскостями MAD и MBC ;
 146. найдите двугранный угол между гранями MAD и AMB ;
 147. найдите угол между плоскостями ABC и MCD ;
 148. точка E — середина ребра MC . Найдите угол между плоскостями ABC и BDE .

Правильная шестиугольная пирамида

В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между плоскостями:

149. MFE и MAV ;
 150. MAF и MCD ;
 151. ABC и MBC .

§ 4. Расстояние от точки до прямой

Куб

В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки:

- | | |
|-------------------------------|-----------------------------|
| 152. A до прямой BB_1 ; | 159. A до прямой B_1C ; |
| 153. A до прямой CC_1 ; | 160. A до прямой A_1C ; |
| 154. A до прямой BC ; | 161. B до прямой A_1C ; |
| 155. A до прямой B_1C_1 ; | 162. A до прямой BD ; |
| 156. B до прямой AC ; | 163. B до прямой DA_1 ; |
| 157. B до прямой A_1C_1 ; | 164. B до прямой AC_1 . |
| 158. B до прямой AD_1 ; | |

Правильная треугольная призма

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки:

- | | |
|-------------------------------|-----------------------------|
| 165. A до прямой CC_1 ; | 169. B до прямой AB_1 ; |
| 166. A до прямой BC ; | 170. B до прямой AC_1 ; |
| 167. B до прямой A_1C_1 ; | 171. A до прямой CB_1 . |
| 168. C до прямой A_1B_1 ; | |

Правильная шестиугольная призма

В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки:

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| 172. A до прямой FF_1 ; | 174. A до прямой DD_1 ; |
| 173. A до прямой EE_1 ; | 175. B до прямой DE ; |

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| 176. C до прямой FE ; | 189. B до прямой AB_1 ; |
| 177. B до прямой AE ; | 190. B до прямой AE_1 ; |
| 178. C до прямой BE ; | 191. A до прямой CF_1 ; |
| 179. B до прямой A_1B_1 ; | 192. B до прямой AD_1 ; |
| 180. C до прямой BD ; | 193. A до прямой CE_1 ; |
| 181. E до прямой AC ; | 194. A до прямой D_1F_1 ; |
| 182. B до прямой FC ; | 195. B до прямой A_1F_1 ; |
| 183. B до прямой CD ; | 196. C до прямой A_1D_1 ; |
| 184. A до прямой D_1E_1 ; | 197. B до прямой FE_1 ; |
| 185. C до прямой F_1E_1 ; | 198. A до прямой B_1E ; |
| 186. B до прямой D_1C_1 ; | 199. A до прямой BE_1 ; |
| 187. A до прямой BC_1 ; | 200. A до прямой C_1D_1 . |
| 188. C до прямой AF_1 ; | |

Правильная шестиугольная пирамида

В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки:

- | | |
|---------------------------|---------------------------------|
| 201. A до прямой MB ; | 204. B до прямой MF ; |
| 202. M до прямой AC ; | 205. F до прямой BK , |
| 203. C до прямой MF ; | где K — середина ребра MC . |

§ 5. Расстояние от точки до плоскости

Куб

В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки:

206. A до плоскости CDD_1 ;
 207. B до плоскости ADD_1 ;
 208. C до плоскости ABC_1 ;
 209. A до плоскости BCD_1 ;
 210. B до плоскости ACC_1 ;
 211. B до плоскости ACD_1 ;
 212. A до плоскости A_1BC_1 ;
 213. C до плоскости BDC_1 ;
 214. C до плоскости AB_1D_1 ;
 215. A до плоскости BDA_1 ;
 216. B до плоскости DA_1C_1 ;
 217. B до плоскости AB_1D_1 ;
 218. M — середины BC_1 до плоскости AB_1D_1 .

Правильная треугольная призма

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки:

219. B до плоскости $A_1B_1C_1$;
 220. A до плоскости BCC_1 ;
 221. B до плоскости AB_1C ;
 222. A до плоскости A_1BC_1 ;
 223. B до плоскости A_1B_1C ;
 224. A до плоскости BCA_1 ;

225. B до плоскости AB_1C_1 ;

226. A до плоскости A_1B_1C .

Правильная шестиугольная призма

В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки:

227. C до плоскости $A_1B_1C_1$;

228. B до плоскости DEE_1 ;

229. C до плоскости EFF_1 ;

230. B до плоскости AEE_1 ;

231. B до плоскости ADD_1 ;

232. C до плоскости ABB_1 ;

233. A до плоскости FCC_1 ;

234. B до плоскости ACC_1 ;

235. B до плоскости FDD_1 ;

236. B до плоскости AED_1 ;

237. B до плоскости CFA_1 ;

238. A до плоскости DEA_1 ;

239. A до плоскости CEF_1 ;

240. B до плоскости ACB_1 ;

241. B до плоскости ACD_1 .

Правильная четырехугольная пирамида

В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки:

242. A до плоскости MCD ;

243. B до плоскости AEC , где E — середина BM .

Правильная шестиугольная пирамида

В правильной шестиугольной пирамиде $MAB CDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки:

244. B до плоскости MED ;

245. B до плоскости MDF ;

246. A до плоскости MBC ;

247. B до плоскости MAC .

§ 6. Расстояние между двумя прямыми

Куб

В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми:

248. BB_1 и CC_1 ;

249. CC_1 и AD ;

250. BB_1 и CD ;

251. BB_1 и DD_1 ;

252. AC и BB_1 ;

253. AA_1 и BD_1 ;

254. BA_1 и CC_1 ;

255. BB_1 и AD_1 ;

256. A_1B и DC_1 ;

257. A_1B и B_1D_1 ;

258. AB_1 и BD_1 ;

259. A_1B и CB_1 ;

260. AB и A_1C ;

261. A_1B и B_1D ;

262. AB_1 и BC_1 .

Правильная треугольная призма

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми:

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 263. AB и B_1C_1 ; | 268. AB и CB_1 ; |
| 264. BB_1 и AC ; | 269. AA_1 и BC_1 ; |
| 265. BB_1 и AC_1 ; | 270. AB и CC_1 ; |
| 266. AB_1 и BC ; | 271. CC_1 и A_1B . |
| 267. AB_1 и BC_1 ; | |

Правильная шестиугольная призма

В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми:

- | | |
|--------------------------|------------------------|
| 272. BB_1 и AE_1 ; | 279. CC_1 и AE_1 ; |
| 273. AA_1 и B_1C_1 ; | 280. BB_1 и CF_1 ; |
| 274. BB_1 и D_1E_1 ; | 281. BC_1 и AD_1 ; |
| 275. AA_1 и BC_1 ; | 282. A_1B и ED_1 ; |
| 276. FF_1 и BC_1 ; | 283. AB_1 и BE_1 ; |
| 277. BB_1 и ED_1 ; | 284. ED_1 и FE_1 . |
| 278. BB_1 и FE_1 ; | |

Правильная четырехугольная пирамида

В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми:

- | | |
|--------------------|--------------------|
| 285. MB и MC ; | 287. MB и AC ; |
| 286. MA и BC ; | 288. MA и BE . |

Правильная шестиугольная пирамида

В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние между прямыми:

289. MA и BD ;
 290. MA и BC ;
 291. MA и CE .

§ 7. Площади сечений многогранников

Куб

Найдите площадь сечения единичного куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через:

292. середины ребер AA_1 , BB_1 , A_1D_1 ;
 293. середины ребер BB_1 , CC_1 , AB ;
 294. вершину C и середины ребер BB_1 , DD_1 ;
 295. вершину D и середины ребер AA_1 , CC_1 ;
 296. вершину B и середины ребер A_1D_1 , D_1C_1 ;
 297. вершину C и середины ребер AD , A_1D_1 ;
 298. вершину B и середины ребер CD , B_1C_1 ;
 299. середины ребер AD , AB , BB_1 ;
 300. вершины A , C и середину ребра A_1D_1 ;
 301. вершины A_1 , B и середину ребра C_1D_1 ;
 302. вершины A_1 , C_1 и середину ребра DC ;
 303. вершины A , B , C_1 ;

304. середины AA_1 , CC_1 и точку на ребре AB , отстоящую от вершины A на $0,2$;

305. середины AA_1 , CC_1 и точку на ребре AB , отстоящую от вершины A на $0,8$;

306. середины ребер CD , A_1B_1 и точку на ребре C_1D_1 , отстоящую от вершины C_1 на $0,25$;

307. середины ребер AA_1 , CC_1 и точку на ребре BC , отстоящую от вершины C на $0,25$.

Прямоугольный параллелепипед

Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого являются:

308. вершины A , A_1 , C , C_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребрами $AB = 2$, $BC = 1$, $AA_1 = 1$;

309. середины ребер AD , BC , DD_1 , CC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребрами $AB = 2$, $AD = 1$, $AA_1 = 1$;

310. середины ребер AD , A_1D_1 , DC , D_1C_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребрами $AB = 2$, $AD = 1$, $AA_1 = 1$;

311. вершины A , A_1 , середины ребер BC , B_1C_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребрами $AB = 2$, $AD = 1$, $AA_1 = 1$.

Правильная треугольная призма

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1 , найдите площадь сечения, проходящего через:

312. середины ребер AC , BC , A_1C_1 ;

313. вершины A , B и середину B_1C_1 ;

314. середины ребер AA_1 , BB_1 и B_1C_1 ;

315. вершины A , A_1 и середину ребра BC ;

316. вершины A_1 , B_1 и середину ребра AC ;

317. вершины A , B_1 , C_1 .

Правильная шестиугольная призма

В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1 , найдите площадь четырехугольника, проходящего через вершины:

318. A , D , A_1 , D_1 ;

321. F , B и C_1 ;

319. B , F и C_1 ;

322. A , D и E_1 ;

320. B , C и E_1 ;

323. F , C и D_1 .

Правильный тетраэдр

В единичном тетраэдре $MABC$ найдите площадь сечения, проходящего через:

324. середины ребер AB , BC , CM , AM ;

325. середины ребер AB , BC и BM ;

326. вершины A , M и середину ребра BC ;

327. вершину M и середины ребер AB и BC .

Правильная четырехугольная пирамида

В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1 , найдите площадь сечения:

328. вершинами которого являются вершины M , A , C ;

329. проходящего через вершины B , C и середину ребра MD ;

330. проходящего через вершины A , B и середину ребра MD ;

331. проходящего через середины ребер AD , BC и MC ;

332. вершинами которого являются середины ребер MA , MB , MC и MD .

Многогранники

Найдите площадь сечения многогранника, проходящего через вершины:

333. A , B и D_2 . Все двугранные углы прямые (рис. 1);

334. A , C и A_2 . Все двугранные углы прямые (рис. 2);

335. B_1 , C_1 и A_2 . Все двугранные углы прямые (рис. 3);

336. A , A_2 и C_2 . Все двугранные углы прямые (рис. 4);

337. A , A_1 и D_2 . Все двугранные углы прямые (рис. 5);

338. A , A_1 и C_2 . Все двугранные углы прямые (рис. 6);

339. A , A_1 и D_3 . Все двугранные углы прямые (рис. 7);

340. A , B и D_3 . Все двугранные углы прямые (рис. 8);

341. A , B и C_1 . Все двугранные углы прямые (рис. 9);

342. A , B и D_3 . Все двугранные углы прямые (рис. 10).

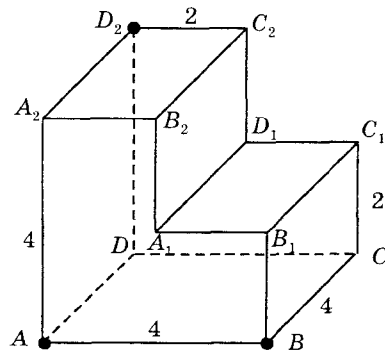


Рис. 1

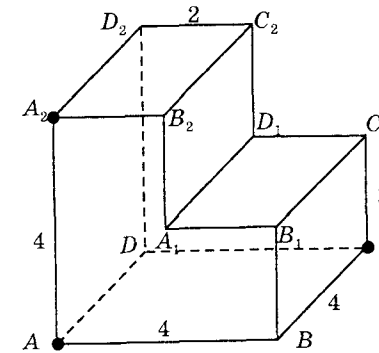


Рис. 2

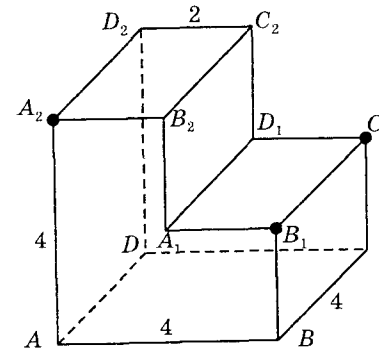


Рис. 3

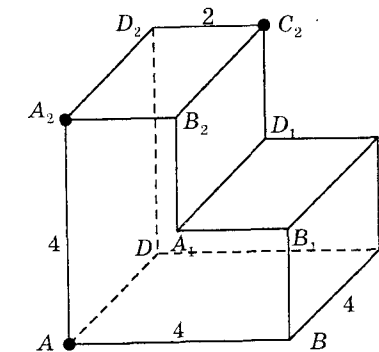


Рис. 4

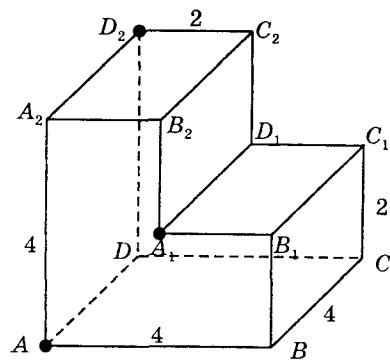


Рис. 5

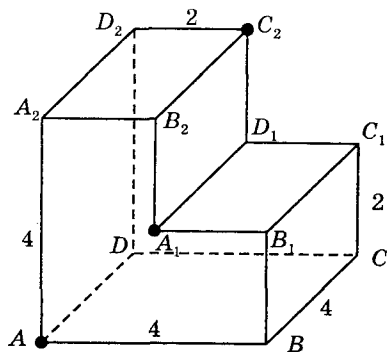


Рис. 6

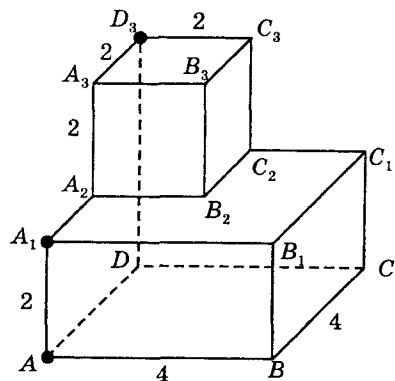


Рис. 7

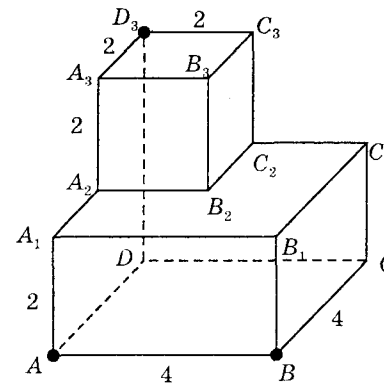


Рис. 8

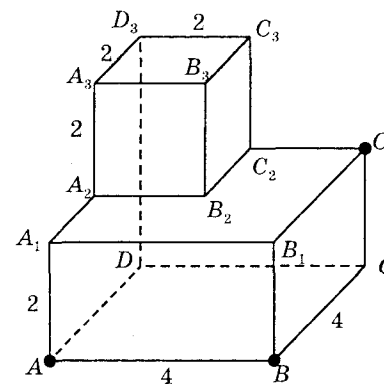


Рис. 9

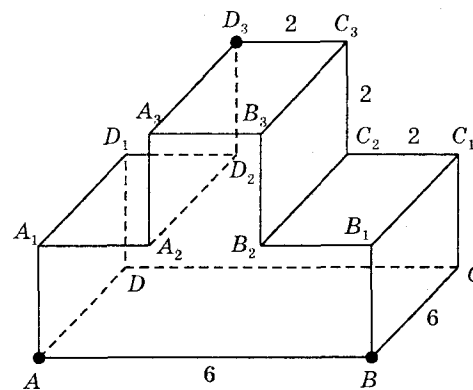


Рис. 10

§ 8. Площади поверхностей вращения плоских фигур

Квадрат

Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, полученного вращением единичного квадрата $ABCD$ вокруг:

- 343. прямой BC ;
- 344. прямой BD ;
- 345. перпендикуляра к диагонали, проведенного через ее конец;
- 346. внешней оси, параллельной его стороне и отстоящей от нее на длину стороны.

Прямоугольник

347. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, полученного вращением прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 1$, $BC = 2$ вокруг прямой BC .

348. Найдите площадь поверхности вращения прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 1$ вокруг прямой, проходящей через середины AB и CD .

349. Найдите площадь поверхности вращения прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 1$ вокруг оси, проходящей через вершину C параллельно диагонали BD .

350. Найдите площадь поверхности вращения прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 1$ вокруг перпендикуляра к диагонали BD , проведенного через ее конец.

Прямоугольный треугольник

351. Найдите площадь боковой поверхности конуса, полученного вращением прямоугольного $\triangle ABC$ с катетами $AC = BC = 1$ вокруг прямой BC .

352. Найдите площадь боковой поверхности тела, полученного вращением прямоугольного $\triangle ABC$ с катетами $AC = BC = 1$ вокруг прямой AB .

353. Найдите площадь боковой поверхности конуса, полученного вращением прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = 2$, $BC = 1$ вокруг прямой BC .

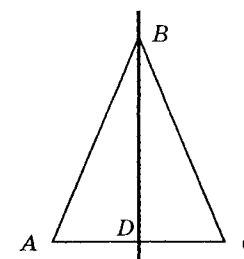
354. Найдите площадь боковой поверхности тела, полученного вращением прямоугольного $\triangle ABC$ с катетами $AC = 2$, $BC = 1$ вокруг прямой AB .

355. Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением прямоугольного $\triangle ABC$ с катетами 5 и 12 вокруг внешней оси, параллельной большому катету и отстоящему от него на 3.

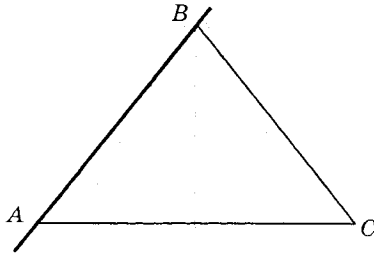
356. Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением прямоугольного $\triangle ABC$ с катетами 15 и 20 вокруг перпендикуляра к гипотенузе, проведенного через вершину большего острого угла B .

Равнобедренный треугольник

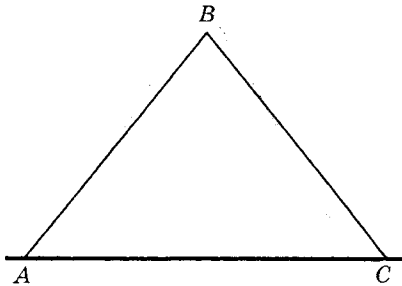
357. Найдите площадь полной поверхности конуса, полученного вращением равнобедренного треугольника ABC с основанием $AC = 4$ и боковой стороной, равной 5, вокруг прямой, содержащей высоту BD этого треугольника.



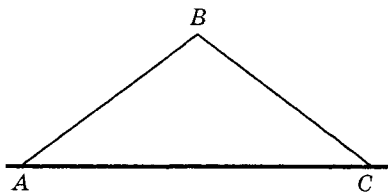
358. Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением равнобедренного треугольника ABC с основанием $AC = 6$ и боковой стороной, равной 5, вокруг прямой AB .



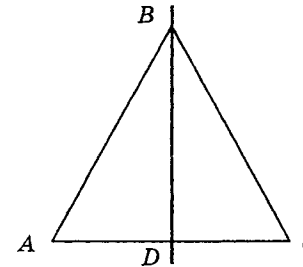
359. Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением равнобедренного треугольника ABC с основанием $AC = 6$ и боковой стороной, равной 5, вокруг прямой AC .



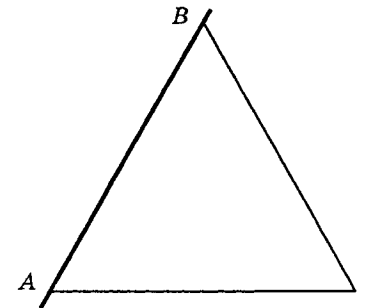
360. Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением равнобедренного треугольника ABC , у которого боковые стороны равны 5, а один из углов 120° , вокруг основания AC .



361. Найдите площадь полной поверхности конуса, полученного вращением равностороннего треугольника ABC со стороной 1 вокруг прямой, содержащей медиану BD .



362. Найдите площадь поверхности вращения равностороннего треугольника ABC со стороной 1 вокруг прямой AB .



Ромб

Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением ромба $ABCD$:

363. с площадью, равной 1, вокруг стороны BC ;

364. со сторонами, равными 1, и острым углом 60° , вокруг прямой BD ;

365. со сторонами, равными 1, и острым углом 60° , вокруг прямой AC ;

366. со сторонами, равными 1, и острым углом 60° , вокруг оси, проведенной через вершину C перпендикулярно к стороне DC .

Круг и его части

Найдите площадь поверхности вращения:

367. круга радиуса 1 вокруг прямой, содержащей его диаметр;

368. полукруга радиуса 1 вокруг прямой OA , перпендикулярной диаметру MN ;

369. четверти круга AOB радиуса 1 вокруг прямой OB .

Правильный шестиугольник

Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной, равной 1, вокруг:

370. оси, проходящей через его вершину C перпендикулярно к радиусу, проведенному в эту вершину;

371. внешней оси, которая параллельна стороне и отстоит от нее на длину апофемы.

§ 9. Объемы тел вращения плоских фигур

Квадрат

Найдите объем тела, полученного вращением единичного квадрата $ABCD$ вокруг:

372. перпендикуляра к диагонали, проведенного через ее конец;

373. внешней оси, параллельной его стороне и отстоящей от нее на длину стороны.

Прямоугольник

Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольника $ABCD$ со сторонами:

374. $AB = 1$, $BC = 2$ вокруг прямой BC ;

375. $AB = 2$, $BC = 1$ вокруг прямой, проходящей через середины AB и CD ;

376. $AB = 2$, $BC = 1$ вокруг оси, проходящей через вершину C параллельно диагонали BD ;

377. $AB = 2$, $BC = 1$ вокруг перпендикуляра к диагонали BD , проведенного через ее конец.

Прямоугольный треугольник

Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольного $\triangle ABC$ с катетами:

378. $AC = BC = 1$ вокруг прямой BC ;

379. $AC = BC = 1$ вокруг прямой AB ;

380. $AC = BC = 1$ вокруг прямой CD , где D — середина AB ;

381. $AC = 2$, $BC = 1$ вокруг прямой BC ;

382. $AC = 2$, $BC = 1$ вокруг прямой AB ;

383. $AC = 5$, $BC = 12$ вокруг внешней оси, параллельной большему катету и отстоящему от него на 3;

384. $AC = 20$, $BC = 15$ вокруг перпендикуляра к гипотенузе, проведенного через вершину большего острого угла B .

Равнобедренный треугольник

Найдите объем тела, полученного вращением равнобедренного $\triangle ABC$ со сторонами:

385. $AB = BC = 1$, $\angle B = 120^\circ$, вокруг прямой AC ;

386. $AB = BC = 5$, $AC = 6$ вокруг прямой, содержащей биссектрису BD этого треугольника;

387. $AB = BC = 5$, $AC = 6$ вокруг прямой AB ;

388. $AB = BC = 5$, $AC = 6$ вокруг прямой AC .

Найдите объем тела, полученного вращением равносностороннего $\triangle ABC$ со стороной 1 вокруг:

389. прямой, содержащей высоту BD ;

390. прямой AB ;

391. перпендикуляра к стороне, проведенного через ее конец;

392. перпендикуляра к прямой, отстоящей от продолжения AC на длину 1.

Трапеция

Найдите объем тела, полученного вращением:

393. трапеции $ABCD$, у которой $AD = DC = BC = 1$, $AB = 2$ вокруг прямой AB ;

394. трапеции $ABCD$, у которой $AD = DC = BC = 1$, $AB = 2$ вокруг прямой CD ;

395. прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 2$, $BC = 1$ и меньшей боковой стороной $CD = 1$ вокруг прямой AD ;

396. прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 2$, $BC = 1$ и меньшей боковой стороной $CD = 1$ вокруг прямой CD ;

397. прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 2$, $BC = 1$ и острым углом 45° вокруг прямой CD ;

398. прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 2$, $BC = 1$ и меньшей боковой стороной $CD = 1$ вокруг прямой BC .

Ромб

Найдите объем тела, полученного вращением ромба $ABCD$ со стороной 1 и острым углом:

399. 30° , вокруг стороны BC ;

400. 60° , вокруг прямой, содержащей меньшую диагональ BD ;

401. 60° , вокруг прямой, содержащей большую диагональ AC ;

402. 60° , вокруг оси, проведенной через вершину C перпендикулярно к стороне DC .

Правильный шестиугольник

Найдите объем тела, полученного вращением правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной, равной 1, вокруг:

403. внешней оси, которая параллельна стороне и отстоит от нее на длину апофемы;

404. оси, проходящей через его вершину C перпендикулярно к радиусу, проведенному в эту вершину.

Многоугольник

Найдите объем тела, полученного вращением многоугольника $ABCDEF$, составленного из трех единичных квадратов, вокруг прямой:

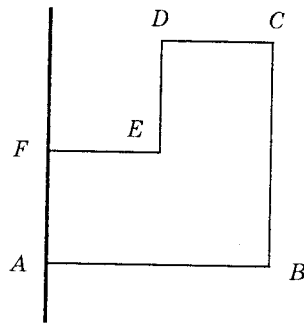
405. AF (рис. 1);406. BC (рис. 2).

Рис. 1

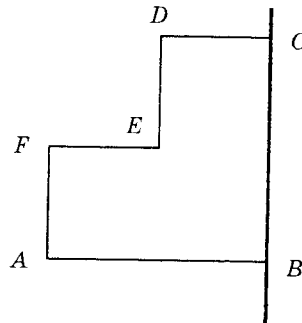


Рис. 2

Круг и его части

Найдите объем тела, полученного вращением:

407. круга радиуса 1, вокруг прямой, содержащей его диаметр;

408. полукруга радиуса 1, вокруг прямой OA , перпендикулярной диаметру MN ;

409. четверти круга AOB радиуса 1, вокруг прямой OB .

§ 10. Объемы тел вращения многогранников

Куб

Найдите объем тела, полученного вращением единичного куба $A...D_1$ вокруг прямой:

410. CC_1 ;

411. проходящей через центры граней ADD_1A_1 и BCC_1B_1 .

Правильная треугольная призма

Найдите объем тела, полученного вращением правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, вокруг прямой:

412. CC_1 ;

413. проходящей через центры оснований ABC и $A_1B_1C_1$.

Правильная четырехугольная пирамида

Найдите объем тела, полученного вращением правильной четырехугольной пирамиды $MABCD$, все ребра которой равны 1, вокруг прямой, содержащей:

414. высоту MO пирамиды;

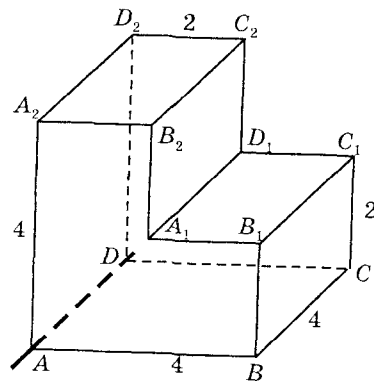
415. диагональ основания AC .

Правильная шестиугольная пирамида

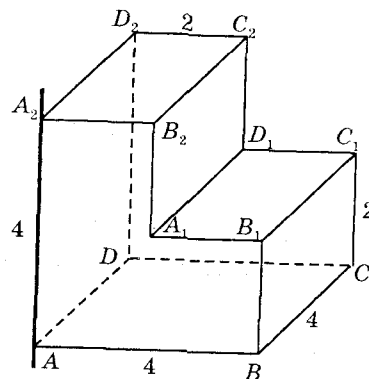
416. Найдите объем тела, полученного вращением правильной шестиугольной пирамиды $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, вокруг прямой, содержащей высоту MO .

Многогранники

417. Найдите объем тела, полученного вращением многогранника вокруг прямой AD . Все двугранные углы прямые.



418. Найдите объем тела, полученного вращением многогранника вокруг прямой AA_2 . Все двугранные углы прямые.



Раздел III

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

§ 11. Многогранники

Куб

419. Площадь поверхности куба равна 150. Найдите его объем.

420. Площадь поверхности куба равна 96. Найдите ребро куба.

421. Площадь полной поверхности куба равна 48. Найдите длину диагонали грани куба.

422. Диагональ куба равна 18. Найдите площадь его одной грани.

423. Ребро куба равно $5\sqrt{2}$. Найдите расстояние от плоскости диагонального сечения до непересекающего его ребра.

424. Найдите площадь диагонального сечения куба, объем которого равен $4\sqrt{2}$.

425. Площадь сечения куба плоскостью, проходящей через диагонали верхнего и нижнего оснований, равна $16\sqrt{2}$. Найдите длину ребра куба.

426. Площадь сечения куба плоскостью, проходящей через три несмежные вершины, равна $18\sqrt{3}$. Найдите длину ребра куба.

427. В кубе $A...D_1$ через середины ребер A_1B_1 , D_1C_1 и вершину B проведено сечение, площадь которого равна $32\sqrt{5}$. Найдите объем куба.

428. В кубе через сторону основания проведено сечение под углом 30° к плоскости основания. Найдите площадь сечения, если ребро куба равно $7\sqrt{3}$.

429. Найдите объем куба, если расстояние от его диагонали до непересекающегося с ней ребра равно 1.

430. Объем куба равен 12. Найдите объем четырехугольной пирамиды, основанием которой является грань куба, а вершиной — центр куба.

431. Сечение куба плоскостью, проходящей через середины смежных сторон оснований и середины противоположных боковых ребер куба, представляет собой правильный шестиугольник, площадь которого равна 1. Найдите полную поверхность куба.

Прямоугольный и прямой параллелепипеды

432. Найдите квадрат расстояния между вершинами A_1 и C прямоугольного параллелепипеда $A...D_1$, если $AB = 6$, $BC = 3$, $AA_1 = 4$.

433. Найдите расстояние между вершинами B и C_1 прямоугольного параллелепипеда $A...D_1$, если $AB = 6$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$.

434. В прямоугольном параллелепипеде $A...D_1$ найдите $\angle DB_1A_1$, если известно, что $AB = 13$, $BC = 5$, $AA_1 = 12$.

435. В прямоугольном параллелепипеде $A...D_1$ найдите $\angle DBD_1$, если известно, что $AB = 13$, $BC = 5$, $AA_1 = 12$.

436. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 6 и 8. Площадь

поверхности этого параллелепипеда равна 208. Найдите длину третьего ребра, выходящего из той же вершины.

437. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 6 и 8. Диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол, тангенс которого равен 0,8. Определите полную поверхность параллелепипеда.

438. Определите объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого равна 1 и составляет с одной гранью угол 30° , а с другой 45° .

439. В прямоугольном параллелепипеде $A...D_1$ $AB = 2$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$, точка K — середина ребра AB . Найдите угол между прямыми A_1C_1 и B_1K .

440. Угол между диагоналями основания прямоугольного параллелепипеда равен 30° . Диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол 45° . Найдите высоту параллелепипеда, если его объем равен 16.

441. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм со сторонами 2 и 8 и острым углом 60° . Большая диагональ параллелепипеда равна $2\sqrt{33}$. Определите его объем.

442. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $A_1C = 12$, $AA_1 = 4$, $AB = 2\sqrt{7}$. Найдите длину ребра B_1C_1 .

443. В прямоугольном параллелепипеде $A...D_1$ известны длины ребер: $AB = 6$, $AD = 8$, $CC_1 = 18$. Найдите угол между плоскостями ABC и D_1AC .

444. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 2 и 1, острый угол между ними равен 60° . Большая диагональ основания равна меньшей диагонали параллелепипеда. Найдите объем параллелепипеда.

445. Основанием параллелепипеда служит ромб с острым углом 30° . Диагональ одной боковой грани перпендикулярна плоскости основания, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 60° . Найдите сторону основания, если полная поверхность параллелепипеда равна $4\sqrt{3}$.

446. Основанием прямого параллелепипеда $A...D_1$ является ромб $ABCD$, сторона которого равна $4\sqrt{3}$, а угол BAD равен 60° . Найдите расстояние от точки A до прямой C_1D_1 , если известно, что боковое ребро данного параллелепипеда равно 8.

447. Объем параллелепипеда $A...D_1$ равен 18. Найдите объем треугольной пирамиды D_1ABC .

Правильная и прямая треугольная призмы

448. Объем правильной треугольной призмы равен $25\sqrt{3}$. Радиус окружности, описанной около основания призмы, равен $5/\sqrt{3}$. Найдите высоту призмы.

449. Объем правильной треугольной призмы равен $72\sqrt{3}$, ее высота равна 8. Найдите сторону основания.

450. Боковая поверхность правильной треугольной призмы равна 6. Найдите высоту призмы, если прямая, проходящая через центр верхнего основания и середину стороны нижнего основания, наклонена к плоскости основания под углом 60° .

451. Объем правильной треугольной призмы равен 3. Найдите площадь сечения, проведенного через боковое ребро и равную ему высоту основания.

452. Через сторону основания правильной треугольной призмы проведена плоскость, отсекающая от призмы пирамиду, объем которой равен 1. Найдите

площадь сечения, если угол между секущей плоскостью и плоскостью основания равен 30° .

453. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 5 и 12. Объем призмы равен 75. Найдите длину бокового ребра.

454. В правильной треугольной призме через сторону нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания проведена плоскость, составляющая с плоскостью нижнего основания угол 45° . Плоскость сечения равна 1. Найдите объем призмы.

455. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с острым углом 30° . Через гипотенузу нижнего основания и вершину прямого угла верхнего основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол 45° . Определите гипотенузу основания, если объем треугольной пирамиды, отсеченной от призмы плоскостью, равен 2.

456. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный $\triangle ABC$, где $AB = BC = 10$, $AB = 16$. Высота призмы равна 6. Найдите угол между прямой C_1B и плоскостью ABB_1 .

457. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный $\triangle ABC$, где $\angle C = 90^\circ$, $AB = 10$, $BC = 2\sqrt{5}$, высота призмы равна $2\sqrt{3}$. Найдите угол между прямой BC_1 и плоскостью ABB_1 .

458. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник с углом 45° при основании. Найдите основание треугольника, если объем призмы равен $\sqrt{2} - 1$, а боковая поверхность равна сумме площадей оснований.

459. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный $\triangle ABC$, боковая сторона которого

равна $8\sqrt{3}$, а $\angle ACB = 120^\circ$. Найдите расстояние от точки A до прямой B_1C_1 , если боковое ребро $AA_1 = 5$.

460. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с острым углом 15° . Наибольшая по площади боковая грань призмы представляет собой квадрат. Найдите тангенс угла между пересекающимися диагоналями двух других боковых граней.

Правильная четырехугольная призма

461. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 14, а диагональ боковой грани — 10. Определите полную поверхность призмы.

462. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 9, а полная поверхность ее равна 144. Определите сторону основания и боковое ребро.

463. В правильной четырехугольной призме сторона основания равна 1, а диагональ призмы образует с плоскостью боковой грани угол 30° . Найдите объем призмы.

464. Объем правильной четырехугольной призмы равен 1. Найдите сторону основания, если угол между диагональю призмы и боковой гранью равен α .

465. В правильной четырехугольной призме площадь основания равна 144, а высота — 14. Определите диагональ этой призмы.

466. Определите диагональ правильной четырехугольной призмы, если диагональ основания равна 8, а диагональ боковой грани — 7.

467. В правильной четырехугольной призме $A...D_1$, стороны основания которой равны 2, а боковые ребра равны 4, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1 .

468. Объем правильной четырехугольной призмы равен 1, а $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, где α — угол между диагоналями двух смежных боковых граней. Найдите сторону основания призмы.

Правильная шестиугольная призма

В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны:

469. $\sqrt{13}$, найдите тангенс угла AD_1D ;

470. $\sqrt{7}$, найдите угол AC_1C ;

471. 13, найдите расстояние между точками C и E_1 ;

472. $2\sqrt{5}$, найдите расстояние между точками B и E_1 .

473. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, стороны основания которой равны 6, а боковые ребра равны 8, найдите расстояние от точки F до прямой E_1D_1 .

474. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, если сторона основания равна 3, а диагональ боковой грани — 5.

475. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, если боковое ребро равно 5, а наибольшая диагональ — 13.

476. Определите объем правильной шестиугольной призмы, если длина наибольшей диагонали равна 1, а боковые грани — квадраты.

Правильная треугольная пирамида

477. В правильной треугольной пирамиде $MAVC$ площадь основания равна 13, объем пирамиды равен 91. Найдите длину высоты MO .

478. В правильной треугольной пирамиде $MAVC$ объем равен 72, а высота MO равна 12. Найдите площадь основания пирамиды.

479. В правильной треугольной пирамиде $MAVC$ D — середина ребра BC . Известно, что $AB = 8$, а площадь боковой поверхности равна 96. Найдите длину апофемы MD .

480. В правильной треугольной пирамиде $MAVC$ D — середина BC . Известно, что $MD = 12$, а площадь боковой поверхности равна 90. Найдите длину отрезка AB .

481. Определите объем правильной треугольной пирамиды, если высота треугольника в основании пирамиды равна 1, а апофема равна 2.

482. Определите высоту правильной треугольной пирамиды, объем которой равен $4\sqrt{3}$, если все плоские углы при вершине прямые.

483. Высота правильной треугольной пирамиды равна $4\sqrt{3}$, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол 45° . Найдите объем пирамиды.

484. Высота правильной треугольной пирамиды равна $4\sqrt{3}$, а боковая грань образует с плоскостью основания угол 60° . Найдите объем пирамиды.

485. В правильной треугольной пирамиде $MAVC$ D — середина AB , $AB = 9$, $MD = 6$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

486. Двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды равен 60° . Найдите боковую поверхность пирамиды, если расстояние от центра основания до середины апофемы боковой грани равно 1.

487. Боковая грань правильной треугольной пирамиды составляет с плоскостью основания угол, тангенс которого равен 2. Найдите тангенс угла между боковым ребром и апофемой противоположащей грани.

488. В правильной треугольной пирамиде $MAVC$ с основанием ABC точка D — середина ребра MA , точка E — середина ребра MB . Найдите угол между плоскостями CDE и ABC , если $MC = 18$, $AB = 12$.

489. Отрезок прямой, соединяющий центр основания правильной треугольной пирамиды с серединой бокового ребра, равен стороне основания. Найдите тангенс угла между смежными боковыми гранями.

490. В правильной треугольной пирамиде расстояние от стороны основания до непересекающего ее ребра в 3 раза меньше стороны основания. Найдите тангенс угла между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.

491. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 2. Расстояние между боковым ребром и непересекающей его стороной основания равно 1. Найдите двугранный угол при основании пирамиды.

492. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 2, а высота, опущенная из вершины основания на противоположную ей боковую грань, равна 1. Определите объем пирамиды.

493. В правильной треугольной пирамиде, объем которой равен $9\sqrt{2}$ и плоский угол при вершине 90° , найдите расстояние между боковым ребром и противоположной стороной основания.

494. Из основания высоты правильной треугольной пирамиды опущен перпендикуляр длиной 1 на

боковое ребро. Найдите объем пирамиды, если двугранный угол между ее боковыми гранями равен 60° .

495. Из основания высоты правильной треугольной пирамиды опущен перпендикуляр длиной 1 на боковое ребро. Найдите объем пирамиды, если двугранный угол между боковой гранью и основанием пирамиды равен 30° .

496. Из основания высоты правильной треугольной пирамиды опущен перпендикуляр длиной 1 на боковую грань. Найдите объем пирамиды, если боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 60° .

497. В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при основании равен 60° . Найдите боковую поверхность пирамиды, если расстояние от центра основания до боковой грани равно 1.

498. Высота правильной треугольной пирамиды равна 1. Боковая грань составляет с плоскостью основания угол 60° . Через сторону основания и середину противоположного бокового ребра проведена плоскость. Найдите площадь полученного сечения.

Правильный тетраэдр

499. Вычислить объем правильного тетраэдра, если радиус окружности, описанной около его грани, равен 1.

500. Полная поверхность правильного тетраэдра равна $24\sqrt{3}$. Определите высоту тетраэдра.

501. В правильном тетраэдре через сторону основания проведена плоскость, делящая объем пирамиды в отношении $2 : 3$, считая от основания. Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания.

502. Площадь поверхности тетраэдра равна 6,8. Найдите площадь поверхности многогранника, вершинами которого являются середины сторон данного тетраэдра.

Треугольная пирамида

503. Основанием пирамиды служит равносторонний треугольник. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания. Найдите угол между третьей боковой гранью и плоскостью основания, если боковая поверхность пирамиды относится к площади основания как $13 : 3$.

504. Основанием пирамиды служит равносторонний треугольник. Одна из боковых граней — также равносторонний треугольник и перпендикулярна плоскости основания. Определите сторону основания пирамиды, если полная поверхность пирамиды равна $\sqrt{5} + 2$.

505. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого основание равно 6 и высота 9; боковые ребра равны между собой, и каждое равно 13. Определите высоту пирамиды.

506. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого основание равно 12, а боковая сторона — 10. Боковые грани образуют с основанием равные двугранные углы, содержащие по 45° . Определите высоту пирамиды.

507. Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 6. Найдите объем пирамиды.

508. В треугольной пирамиде боковые ребра попарно перпендикулярны. Их длины составляют соответственно 3; 5 и 8. Найдите объем пирамиды.

509. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 1, и острым углом 30° . Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45° . Найдите объем пирамиды.

510. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, площадь которого равна 3, а угол между боковыми сторонами равен 30° . Все боковые ребра пирамиды составляют с плоскостью основания одинаковые углы. Найдите тангенс этого угла, если объем пирамиды равен 1.

Треугольная усеченная пирамида

511. Основаниями усеченной пирамиды служат прямоугольные треугольники с острым углом 30° . Гипотенузы треугольников равны соответственно 6 и 4. Найдите объем усеченной пирамиды, если ее высота равна $\sqrt{3}$.

512. Основаниями усеченной пирамиды служат равнобедренные прямоугольные треугольники, гипотенузы которых равны 7 и 5. Найдите объем усеченной пирамиды, если ее высота равна 12.

513. Стороны оснований правильной усеченной треугольной пирамиды равны 2 и 1, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60° . Найдите объем усеченной пирамиды.

514. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 6 и 12, высота равна 1. Найдите боковую поверхность.

Правильная четырехугольная пирамида

515. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ известно, что $MO = 12$, $AC = 10$. Найдите длину бокового ребра MC .

516. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ известно, что $MC = 10$, $AC = 12$. Найдите длину высоты MO .

517. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ $MA = 20$, высота $MO = 12$. Найдите длину MO .

518. Боковая поверхность правильной четырехугольной пирамиды равна 60, а сторона основания — 6. Найдите объем пирамиды.

519. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 12, а сторона основания — 18. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

520. Диагональ квадрата, лежащего в основании правильной четырехугольной пирамиды, равна длине бокового ребра и равна 1. Найдите полную поверхность пирамиды.

521. Определите объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 45° , а площадь диагонального сечения равна 1.

522. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ точка E — середина ребра MA , точка F — середина ребра MC . Найдите угол между плоскостями BEF и ABC , если $AB = 6$, $MC = 8$.

523. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ боковое ребро $MA = \sqrt{5}$, сторона основания равна 2. Найдите расстояние от точки M до плоскости ABN , где N — середина ребра MC .

524. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 1, а плоский угол при вершине пирамиды равен 30° . Найдите расстояние от центра основания пирамиды до ее бокового ребра.

525. В правильной четырехугольной пирамиде косинус плоского угла при вершине равен $16/25$. Найдите отношение площади диагонального сечения к площади ее основания.

526. Апофема правильной четырехугольной пирамиды равна 10. Тангенс двугранного угла при основании равен $4/3$. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

527. Апофема боковой грани правильной четырехугольной пирамиды равна $6\sqrt{3}$, а угол между апофемой боковой грани и плоскостью основания — 60° . Найдите объем пирамиды.

528. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 1 и наклонено к плоскости основания под углом 60° . Найдите объем пирамиды.

529. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен 120° . Найдите площадь диагонального сечения, если боковая поверхность равна 4.

530. В правильной четырехугольной пирамиде расстояния от центра основания до боковой грани и до бокового ребра равны соответственно $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$. Найдите двугранный угол при основании пирамиды.

Четырехугольная пирамида

531. В основании пирамиды лежит квадрат. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к нему под углом 45° . Найдите объем пирамиды, если длина среднего по величине ребра равна 1.

532. В основании пирамиды лежит прямоугольник. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углами 30° и 60° . Найдите площадь основания пирамиды, если объем равен 9.

533. Основанием пирамиды служит ромб с диагоналями, равными 6 и 8; высота пирамиды проходит че-

рез точку пересечения диагоналей ромба, лежащего в основании пирамиды, и равна 1. Определите боковую поверхность пирамиды.

534. Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны равны 20 и 36, а площадь равна 360, высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 12. Определите боковую поверхность пирамиды.

Правильная четырехугольная усеченная пирамида

535. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 3 и 5, ребро усеченной пирамиды равно $\sqrt{17}$. Найдите площадь полной поверхности.

536. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 3 и 1. Найдите объем усеченной пирамиды, если ее высота равна 3.

537. Определить объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если ее диагональ равна 18, а длины сторон оснований равны 14 и 10.

538. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 3, сторона большего основания равна $9\sqrt{2}$. Найдите объем пирамиды, если боковое ребро составляет с основанием угол 45° .

539. Основаниями правильной усеченной пирамиды служат квадраты со сторонами 2 и 1. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 45° . Определите объем усеченной пирамиды.

540. Стороны оснований правильной четырехугольной пирамиды равны 2 и 1. Определить объем пирамиды, если острый угол боковой грани равен 60° .

541. Стороны оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны 2 и 1. Найдите объем пирамиды, если боковая поверхность равна половине полной поверхности.

542. В усеченной пирамиде разность площадей оснований равна 6, высота усеченной пирамиды равна 9, объем — 42. Определите площади оснований.

Правильная шестиугольная пирамида

543. В правильной шестиугольной пирамиде апофема равна 1, а двугранный угол при основании равен 60° . Найдите полную поверхность пирамиды.

544. Найдите боковую поверхность правильной шестиугольной пирамиды, высота которой равна 1, а боковое ребро равно 2.

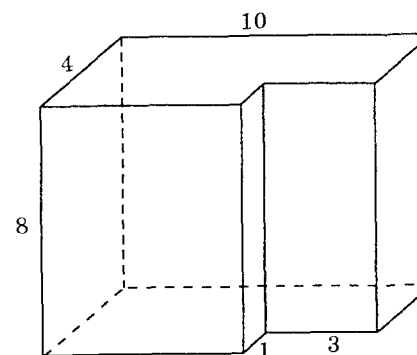
545. Объем треугольной пирамиды, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды, равен 1. Найдите объем шестиугольной пирамиды.

546. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 8, а угол между боковой гранью и основанием равен 45° . Найдите объем пирамиды.

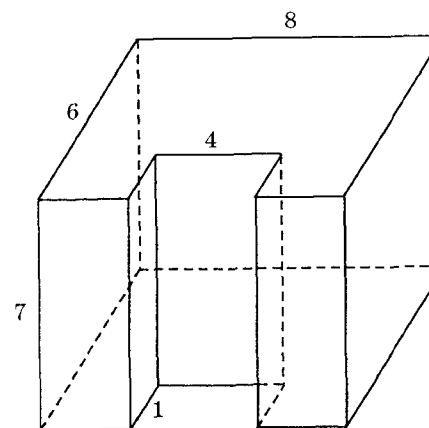
547. Найдите сторону основания правильной шестиугольной пирамиды, объем которой равен $9\sqrt{11}/4$, если известно, что ее боковая поверхность в 10 раз больше площади основания.

Многогранники

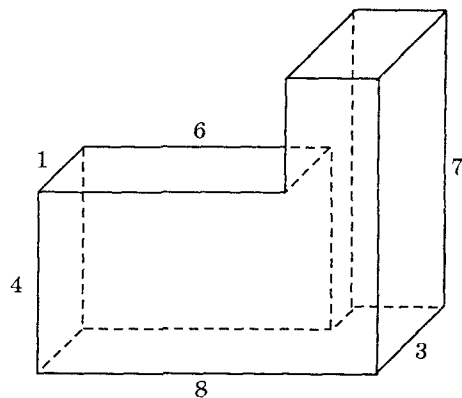
548. Найдите площадь поверхности многогранника (все двугранные углы прямые).



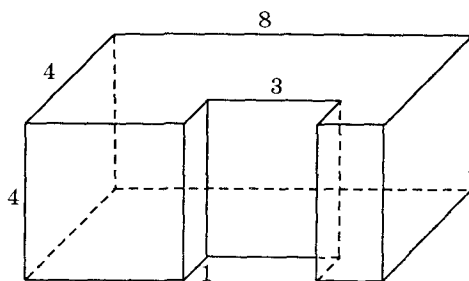
549. Найдите площадь поверхности многогранника (все двугранные углы прямые).



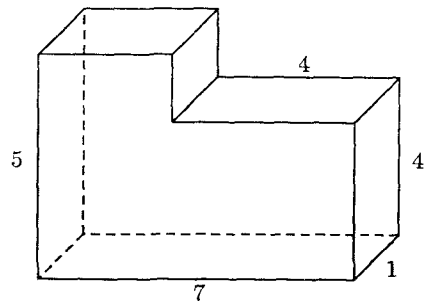
550. Найдите объем многогранника (все двугранные углы прямые).



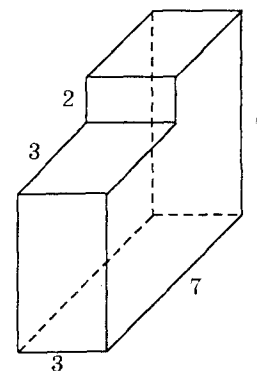
551. Найдите объем многогранника (все двугранные углы прямые).



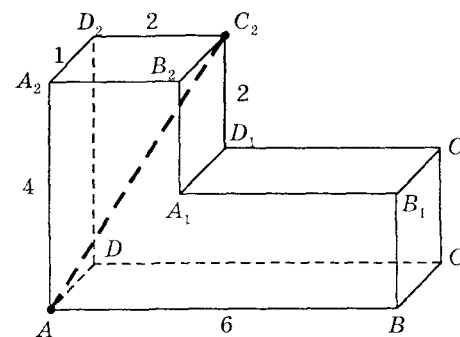
552. Найдите объем многогранника (все двугранные углы прямые).



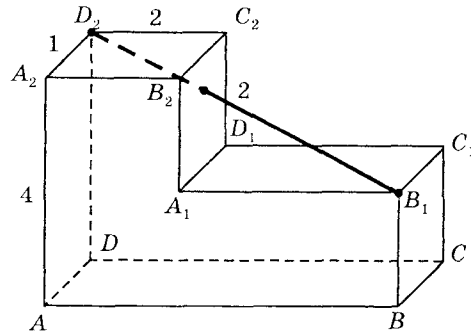
553. Найдите объем многогранника (все двугранные углы прямые).



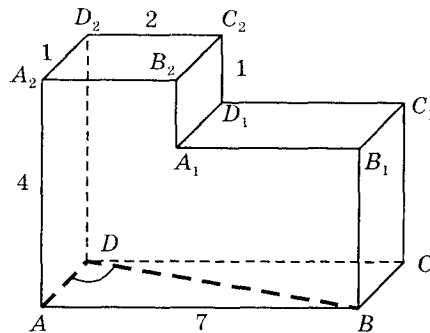
554. Найдите квадрат расстояния между вершинами A и C_2 многогранника. Все двугранные углы прямые.



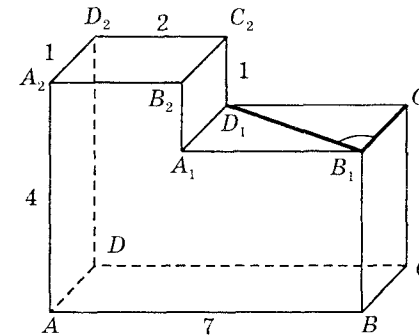
555. Найдите квадрат расстояния между вершинами B_1 и D_2 многогранника. Все двугранные углы прямые.



556. Найдите $\operatorname{tg} \angle ADB$ многогранника. Все двугранные углы прямые.



557. Найдите $\operatorname{tg} \angle D_1B_1C_1$ многогранника. Все двугранные углы прямые.



§ 12. Фигуры вращения

Цилиндр

558. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 81π , а диаметр основания — 9. Найдите высоту цилиндра.

559. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 20π , а высота — 4. Найдите диаметр основания.

560. Объем цилиндра равен $8\pi\sqrt{5}$, а высота — $2\sqrt{5}$. Найдите диагональ осевого сечения.

561. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 24π , а его объем равен 48π . Найдите его высоту.

562. Осевым сечением цилиндра является квадрат с диагональю $6\sqrt{2/\pi^2}$. Найдите объем цилиндра.

563. Осевым сечением цилиндра является квадрат с диагональю $\sqrt[3]{72\sqrt{2}/\pi}$. Найдите объем цилиндра.

564. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Боковые ребра равны $7/\pi$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

565. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 12 и 5. Боковые ребра равны $16/\pi$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

566. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 5. Боковые ребра равны $18/\pi$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

567. Правильная треугольная призма вписана в цилиндр, радиус основания которого равен $2\sqrt{3}$, а высота равна 2. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

568. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите объем конуса, если объем цилиндра равен 150.

569. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 4. Объем параллелепипеда равен 16. Найдите высоту цилиндра.

Конус

570. Высота конуса равна 8, а диаметр основания — 30. Найдите образующую конуса.

571. Диаметр основания конуса равен 56, а длина образующей — 53. Найдите высоту конуса.

572. Найдите площадь боковой поверхности прямого кругового конуса, если образующая его равна 7, а площадь основания — $36/\pi$.

573. Площадь боковой поверхности конуса равна 13, длина образующей — $1/\sqrt{3}\pi$. Найдите площадь основания конуса.

574. Образующая конуса $l = 6/\sqrt[3]{\pi}$ и составляет с плоскостью основания угол 30° . Найдите объем конуса.

575. Образующая конуса $l = 4\sqrt[3]{9/\pi}$ и составляет с плоскостью основания угол 30° . Найдите объем конуса.

576. Площадь боковой поверхности конуса равна 65π , образующая конуса — 13. Найдите котангенс угла между образующей конуса и его высотой.

577. Объем конуса равен $4,5\pi$, высота его равна 6. Найдите тангенс угла между высотой и образующей конуса.

578. Объем конуса равен $2\pi^2/3$, а боковая поверхность равна сумме площадей основания и осевого сечения. Найдите радиус основания конуса.

579. Разность между образующей и высотой конуса равна 1, а угол между ними равен 60° . Найдите объем конуса.

580. Осевым сечением конуса служит равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь его равна 9. Найдите объем конуса.

581. Объем конуса равен 24. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.

582. Высота конуса 20, радиус его основания — 25. Найдите площадь сечения, проведенного через вершину, если его расстояние от центра основания конуса равно 12.

583. Через вершину конуса под углом в 45° к основанию проведена плоскость, отсекающая четверть окружности основания. Высота конуса равна 10. Определите площадь сечения.

584. Найдите объем V части конуса. В ответе укажите значение V/π (рис. 1).

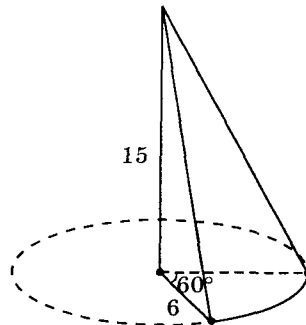


Рис. 1

585. Найдите объем V части конуса. В ответе укажите значение V/π (рис. 2).

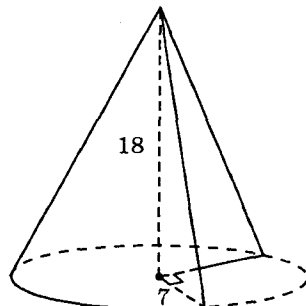


Рис. 2

Усеченный конус

586. В усеченном конусе диагональ осевого сечения равна 10, радиус меньшего основания — 3, высота — 10. Найдите радиус большего основания.

587. В усеченном конусе диагональ осевого сечения равна 10, радиусы оснований — 2 и 4. Найдите высоту конуса.

588. Радиус одного основания усеченного конуса вдвое больше другого; боковая поверхность равна сумме площадей оснований; площадь осевого сечения равна 36. Найдите объем.

589. Высота усеченного конуса равна 3. Радиус одного основания вдвое больше другого, а образующая наклонена к основанию под углом в 45° . Найдите объем.

590. В усеченном конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны, длина каждой из них равна $\sqrt{(2+\sqrt{3})/\sqrt{2}}$. Угол между образующей и плоскостью основания равен 75° . Найдите полную поверхность усеченного конуса.

591. Радиусы оснований усеченного конуса и его образующая относятся как 1 : 4 : 5, высота равна 8. Найдите площадь боковой поверхности.

Шар

592. Площадь поверхности шара равна 64. На расстоянии $3/2\sqrt{\pi}$ от центра шара проведена плоскость. Найдите площадь полученного сечения.

593. Площадь поверхности шара равна $37/\pi$. На расстоянии $1/2\pi$ от центра шара проведена плоскость. Найдите длину полученной в сечении окружности.

594. Дан шар радиуса $R = 8/\sqrt{\pi}$. Через конец радиуса проведена плоскость под углом 60° к нему. Найдите площадь сечения.

595. Дан шар радиуса $R = 12/\sqrt{\pi}$. Через конец радиуса проведена плоскость под углом 30° к нему. Найдите площадь сечения.

596. В шар вписан конус. Найдите высоту конуса, если радиус шара равен 5, а радиус основания конуса — 4.

597. В шар вписан конус, образующая которого равна диаметру основания. Найдите отношение полной поверхности этого конуса к поверхности шара.

598. Около куба с ребром $2\sqrt{3}$ описан шар. Найдите объем этого шара, деленный на π .

Треугольник

599. Прямоугольный треугольник с гипотенузой $10/\sqrt[3]{\pi}$ и острым углом 30° вращается вокруг гипотенузы. Найдите объем тела вращения.

600. Прямоугольный треугольник с катетами $5/\sqrt{\pi}$ и $12/\sqrt{\pi}$ вращается вокруг меньшего катета. Найдите площадь полной поверхности тела вращения.

601. Прямоугольный треугольник с острым углом 60° и гипотенузой, равной 1, вращается вокруг биссектрисы внешнего прямого угла. Найдите объем тела вращения.

602. Прямоугольный треугольник с острым углом 60° и противолежащим катетом длиной 1 вращается вокруг прямой, лежащей в плоскости треугольника, проходящей через вершину данного угла и перпенди-

кулярной его биссектрисе. Найдите объем тела вращения.

603. Равнобедренный треугольник с основанием $2\sqrt{3/\pi}$ и высотой $\frac{1}{2}\sqrt{15/\pi}$ вращается вокруг высоты. Найдите площадь полной поверхности тела вращения.

604. Равнобедренный треугольник с основанием $6/\pi$ и высотой $5\sqrt{2}$ вращается вокруг основания. Найдите объем тела вращения.

605. Равносторонний треугольник со стороной $\sqrt[3]{16/\pi}$ вращается вокруг одной из сторон. Найдите объем полученной фигуры вращения.

606. Равносторонний треугольник со стороной $6/\sqrt[3]{\pi}$ вращается вокруг одной из сторон. Найдите объем полученной фигуры вращения.

607. Правильный треугольник со стороной, равной 1, вращается вокруг прямой, проходящей через вершину треугольника и составляющей со стороной угол 45° . Найдите объем полученного тела вращения.

Прямоугольник

608. Прямоугольник со сторонами $\sqrt{5/\pi}$ и $\sqrt{125/\pi}$ вращается вокруг меньшей стороны. Найдите площадь полной поверхности тела вращения.

609. Прямоугольник со сторонами $2\sqrt{7/\pi}$ и $2\sqrt{1/7\pi}$ вращается вокруг прямой, проходящей через середины больших сторон. Найдите площадь полной поверхности тела вращения.

610. Прямоугольник, площадь которого равна 1, а угол между диагоналями равен 15° , вращается вокруг

оси, проходящей через его вершину параллельно диагонали. Найдите поверхность тела вращения.

611. Прямоугольник со сторонами 5 и 12 вращается вокруг перпендикуляра к диагонали, проведенного через ее конец. Найдите объем тела вращения.

Параллелограмм и трапеция

612. Ромб, площадь которого равна 13, вращается вокруг стороны. Определите поверхность полученного тела вращения.

613. Ромб со стороной 7 и острым углом 60° вращается вокруг оси, проведенной через вершину этого угла перпендикулярно к стороне. Определите поверхность тела вращения.

614. Ромб с диагоналями $\sqrt{15}$ и $120/\pi$ вращается вокруг большей диагонали. Найдите объем полученного тела вращения.

615. Квадрат со стороной $\sqrt[6]{81/2\pi^2}$ вращается вокруг диагонали. Найдите объем полученного тела вращения.

616. В равнобедренной трапеции с острым углом 75° большее основание равно 1, а диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найдите объем тела, полученного вращением трапеции вокруг ее большего основания.

617. Равнобедренная трапеция с острым углом 45° вращается вокруг боковой стороны длиной 6, равной меньшему основанию. Найдите объем полученного тела вращения.

§ 13. Дополнительные задачи

618. В треугольной пирамиде две боковые грани взаимно перпендикулярны. Площади этих граней равны 12 и 8, а длина их общего ребра равна 4. Определите объем пирамиды.

619. Площадь сечения куба плоскостью, проходящей через концы трех ребер, выходящих из одной вершины, равна $8\sqrt{3}$. Найдите длину ребра куба.

620. Основанием пирамиды служит прямоугольник, площадь которого равна 36. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углами 30° и 60° . Найдите объем пирамиды.

621. В пирамиде сечение, параллельное основанию, делит высоту в отношении 3:5 (считая от вершины пирамиды), площадь сечения меньше площади основания пирамиды на 330. Найдите площадь сечения.

622. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, у которой плоский угол при вершине равен 90° , а расстояние между боковым ребром и противоположной стороной основания равно $3\sqrt{2}$.

623. Дана правильная четырехугольная пирамида $МАВCD$, все ребра которой равны 1. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду.

624. Диаметр шара, равный 30, служит осью цилиндра, у которого радиус основания равен 12. Определите объем шара, заключенного внутри цилиндра.

625. Диагонали ромба 15 и 20. Шаровая поверхность касается всех его сторон. Радиус шара равен 10. Найдите расстояние от его центра до плоскости ромба.

626. Радиус шара равен 9. В него вписана правильная четырехугольная призма, высота которой равна 14. Найдите сторону основания призмы.

627. Основанием треугольной пирамиды $MAVC$ служит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = 1$ и $AC = 2$. Ребро $MA = 3$ и перпендикулярно плоскости ABC . Найдите радиус шара, описанного около пирамиды.

628. Основанием четырехугольной пирамиды $MAVCDA_1B_1C_1D_1$ служит прямоугольник $ABCD$. Точка F лежит на ребре MB , причем $KB:MB = 2:5$. Найдите отношение объемов многогранников, на которые разбивает пирамиду плоскость, проходящая через точки A, D, F .

629. В кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$ через вершину B проведена диагональ. Найдите отношение площади сечения куба плоскостью, перпендикулярной указанной диагонали и проходящей через ее середину, к площади его полной поверхности.

630. Около шара описан прямой параллелепипед, диагонали основания которого равны 2 и 4. Найдите полную поверхность параллелепипеда.

631. Объем шара, вписанного в конус, равен $\frac{4\pi\sqrt{3}}{27}$.

Угол при вершине осевого сечения конуса 60° . Найдите площадь боковой поверхности конуса.

632. В конус, осевым сечением которого является равносторонний треугольник, вписан шар, объем которого равен 36π . Найдите высоту конуса.

633. В основании прямой призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого равна 18. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если ее высота равна $2 - \sqrt{2}$.

634. Площадь боковой поверхности конуса равна 36, расстояние от центра основания до образующей конуса равно 7. Найдите объем конуса.

635. Расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней куба равно 2. Найдите полную поверхность куба.

636. В наклонной треугольной призме стороны основания равны 5, 6 и 9, боковое ребро равно 10 и составляет с плоскостью основания угол 45° . Определите объем призмы.

637. В треугольной призме расстояния между боковыми ребрами относятся как $9 : 10 : 17$. Боковое ребро равно 1, боковая поверхность равна 6. Определите объем призмы.

638. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 8, а диагональ боковой грани равна $4\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.

639. В правильной треугольной пирамиде $MAVC$ с основанием ABC известны длины ребер: $AB = 24\sqrt{3}$, $MC = 26$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой AE , где E — точка пересечения медиан грани MBC .

640. Отрезок прямой, соединяющий центр основания правильной треугольной пирамиды с серединой бокового ребра, равен стороне основания. Найдите угол между смежными боковыми гранями пирамиды.

641. Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды в $\sqrt{3}$ раз больше площади ее основания. Найдите $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, где α — плоский угол при вершине пирамиды.

642. В правильной треугольной пирамиде $MAVC$ с основанием ABC известны длины ребер $AB = 8\sqrt{3}$, $MC = 17$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины ребер AM и BC .

643. В правильной треугольной пирамиде $MAVC$ с основанием ABC известны длины ребер: $AB = 2\sqrt{3}$, $MC = 4\sqrt{10}$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой EF , где E — середина ребра AM , а точка F делит ребро BC в отношении $1 : 2$.

644. В правильной треугольной пирамиде $MAVC$ с основанием ABC известны длины ребер: $AB = 5\sqrt{3}$, $MC = 10\sqrt{2}$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой CE , где E — середина AM .

645. В правильной четырехугольной пирамиде $MAVCD$ известны: $AB = 8$, высота $MO = 3$. Точка K — середина ребра MB , точка P — середина BC . Найдите угол между прямыми AK и MP .

646. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды $MAVCD$ равна $4\sqrt{2}$, угол между боковым ребром и плоскостью основания равен $\arctg 0,25$. Точка E — середина ребра MD , точка F — середина ребра AD . Найдите угол между прямыми CE и MF .

647. В основании прямой призмы $ABVCD_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABVCD$. Известно, что $\angle ABC = 30^\circ$ и $AB = CC_1$. Найдите угол между плоскостями ABC и ADM , где M — середина ребра BB_1 .

648. В правильной четырехугольной пирамиде $MAVCD$ через диагональ основания BD перпендикулярно ребру MC проведено сечение. Найдите объем пирамиды, если плоскость сечения образует с плос-

костью основания угол α , где $\sin \alpha = 7/4$, а площадь сечения равна 189.

649. В треугольной пирамиде длины двух непересекающихся ребер равны 12 и 4, а остальные ребра имеют длину 7. В пирамиду вписана сфера. Найдите расстояние от центра сферы до ребра наибольшей длины.

650. Высота прямого кругового конуса равна 4, а радиус основания равен 2. В конус вписана правильная треугольная пирамида $MAVC$ (M — вершина конуса). Определите объем тела, заключенного между гранью пирамиды MAV и меньшей частью конуса.

651. В конус вписан шар. Окружность касания шаровой и конической поверхности делит объем шара в отношении $5 : 27$. Найдите угол между образующей и плоскостью основания.

652. Высота пирамиды равна 5, а основанием служит треугольник со сторонами 7, 8 и 9. Некоторая сфера касается плоскостей всех боковых граней пирамиды в точках, лежащих на сторонах основания. Найдите радиус сферы.

653. Диаметр шара совпадает с высотой конуса, объема конуса и шара равны. Вычислите отношение длины линии пересечения поверхности шара и боковой поверхности конуса к длине окружности основания конуса.

654. В конус вложен шар так, что их поверхности касаются. Объем тела, заключенного между ними, в 8 раз меньше объема шара. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

655. Четырехугольная пирамида $MAVCD$ вписана в сферу, центр которой лежит в плоскости основания $ABVCD$. Диагонали AC и BD основания пересекаются в точке O , причем MO — высота пирамиды. Найдите длины ребер CM и CD , если $CO = 4$, $AM = 3,75$, $AD = 3$ и $AB = BM$.

656. Объем правильной треугольной усеченной пирамиды в 3 раза больше объема вписанного в него шара. Найдите угол между боковой гранью пирамиды и плоскостью ее основания.

657. Из середины высоты правильной четырехугольной пирамиды проведены два перпендикуляра: один длиной 1,4 к боковому ребру, другой длиной 1 — к боковой грани. Найдите объем пирамиды.

658. Высота треугольной пирамиды $MABC$, опущенная из вершины M , проходит через точку пересечения высот треугольника ABC . Найдите отношение площадей граней ABM и ACM , если $MC = 6 - \sqrt{2}$, $MB = 6 + \sqrt{2}$, $BC = 2\sqrt{19}$.

659. В пирамиде $MABC$ известно, что ребро $MB \perp (ABC)$, $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$, $MB = 10$, $BC = \frac{16}{\sqrt{3}}$. Найдите расстояние между прямыми AB и MC .

660. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с вершиной M высота равна 7, точка K — середина отрезка AC . Сфера, проходящая через точки K , A и B , касается ребра MC в такой точке E , что $ME : EC = 2 : 1$. Найдите апофему пирамиды $MABC$.

661. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с вершиной M даны $MA = 8$, $AB = 12$. На боковых ребрах MC и MA взяты точки E и F соответственно так, что $ME = MF = 2$. Найдите радиус сферы, проходящей через точки E , F , A и B .

662. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. На ребре CC_1 выбрана точка D . Сечение, проходящее через точки A , B_1 и D , делит призму на два многогранника $ABCD B_1$ и $B_1 A A_1 C_1 D$, отношение объемов которых равно $5 : 8$. В каком отношении точка D делит ребро CC_1 ?

663. Найдите объем тетраэдра $ABCD$ с длинами ребер $AB = 5$, $AC = 1$ и $CD = 7$, если расстояние между серединами M и N его ребер AC и BD равно 3, а прямая AC образует равные углы с прямыми AB , CD и MN .

664. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с вершиной M точка K — середина отрезка AB , $MK = \sqrt{17}$. Сфера, проходящая через точки B , C и K , касается ребра MA в такой точке F , что $AF : FM = 1 : 2$. Найдите высоту MO пирамиды $MABC$.

665. В прямой круговой конус вписан шар. Отношение площади полной поверхности конуса к площади поверхности шара равно $49 : 12$. Найдите отношение удвоенного объема шара к объему конуса.

666. Сфера радиуса $\frac{\sqrt{17}}{2}$ касается всех сторон правильного треугольника ABC . Точка M такова, что плоскости MAB , MBC и MCA касаются сферы. Расстояние от точки M до плоскости ABC равно 8. Найдите объем пирамиды $MABC$.

667. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с вершиной M проведена медиана BD в $\triangle MBC$ и даны $AB = 2$, $MA = 6$. Через середину F ребра MB проведена прямая FE , параллельная ребру AC . Через точку A проведена прямая, пересекающая прямые BD и FE в точках K и L соответственно. Найдите длину отрезка KL .

668. В четырехугольной пирамиде $MABCD$ основанием является параллелограмм $ABCD$, $\angle BMC = \angle AMB = 90^\circ$. Все вершины пирамиды лежат на окружностях оснований усеченного конуса, высота которого равна 1,5, а радиусы оснований равны 1 и 1,25. Найдите объем пирамиды.

669. В основании призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольник $ABCD$. Острые углы D_1DA и D_1DC равны между собой, угол между ребром D_1D и плоскостью

основания призмы равен $\arccos \frac{1}{\sqrt{13}}$, а $CD = 5\sqrt{6}$. Все грани призмы касаются некоторой сферы. Найдите BC и угол между плоскостями D_1DC и ABC .

670. В кубе $A...D_1$ найдите угол между диагональю AD_1 и плоскостью DD_1B_1B .

671. Основанием прямоугольного параллелепипеда $A...D_1$ является квадрат со стороной 5, длина бокового ребра равна 12. Найдите расстояние от вершины D до диагонали C_1B боковой грани.

672. Основанием прямоугольного параллелепипеда $A...D_1$ является квадрат со стороной 3. Через диагональ AC основания и середину ребра C_1D_1 проведена плоскость. Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания параллелепипеда, если высота параллелепипеда равна $3\sqrt{2}$.

673. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ сторона основания равна 6, а высота — 12. Через сторону основания AB и медиану BF боковой грани MBC проведена плоскость. Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания пирамиды.

674. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ сторона основания и высота равны соответственно 4 и 8. Найдите расстояние между медианой BE боковой грани MBC и ребром AM .

675. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC , где $\angle C = 90^\circ$. Известно, что $AC = BC = AA_1$. Найдите угол между прямыми A_1E и AD , если E — середина AC , D — середина A_1B_1 .

676. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ все плоские углы при вершине M прямые. На серединах ребер AB , AC и MC взяты соответственно точки D , E и F . Найдите угол между прямыми DF и ME .

677. В прямоугольном параллелепипеде $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми AD_1 и DC_1 , если $AA_1 = 2$, $AB = 6$, $AD = 8$.

678. В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник, в котором $AB : AD = 1 : 2$. Известно, что боковое ребро $MB \perp (ABCD)$ и $MB = AB = 4$. Найдите расстояние от точки O — центра основания, до плоскости MAD .

679. Высота MO правильной треугольной пирамиды $MABC$ равна стороне ее основания. Найдите угол между прямой MC и плоскостью MAB .

680. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ на ребре MA взята точка K — середина этого ребра. Найдите угол между прямой DK и плоскостью MAB , если $AB : MA = 1 : 2$.

681. В правильной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отношение ребер $AB : AA_1 = 3 : 4$. Найдите угол между плоскостями AB_1C и BC_1D .

682. На ребрах BC и MB правильного тетраэдра $MABC$ взяты соответственно точки K и N — середины этих ребер. Найдите угол между плоскостями AKN и MAB .

683. В основании пирамиды лежит треугольник, стороны которого относятся как $13 : 14 : 15$, а каждый из двугранных углов при ребрах основания равен 45° . Найдите отношение площади полной поверхности пирамиды к площади ее основания.

684. В правильной треугольной пирамиде через ребро основания длиной 1 проведено сечение, перпендикулярное противоположному боковому ребру. Найдите площадь поверхности пирамиды, если секущая плоскость делит боковое ребро в отношении $4 : 2$.

§ 14. Применение метода координат

685. Точки M и N — середины соответственно ребер AA_1 и AD куба $A...D_1$. Найдите угол между прямыми C_1N и AB_1 .

686. В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M — середина ребра AC , $AB : AA_1 = 1 : \sqrt{3}$. Найдите угол между прямыми B_1M и BA_1 .

687. В основании пирамиды $MABC$ лежит прямоугольный $\triangle ABC$. Ребро $MC \perp (ABC)$, $MC = AC = BC$. На ребрах MC , MB и BC взяты соответственно точки E , F и K — середины этих ребер. Найдите угол между прямыми CF и AK .

688. В основании пирамиды $MABCD$ лежит квадрат $ABCD$. Ребро $MB \perp (ABCD)$, $MB = AB$, P — середина ребра MC . Найдите угол между прямыми AC и PD .

689. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны 1. На ребрах AA_1 и CC_1 взяты соответственно точки M и N — середины этих ребер. Найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC .

690. В основании прямого параллелепипеда $A...D_1$ лежит параллелограмм с острым $\angle A = 60^\circ$. Известно, что $AB : AD : AA_1 = 1 : 2 : 3$. Найдите угол между прямой B_1D и плоскостью грани AA_1DD_1 .

691. В правильной четырехугольной призме $A...D_1$ диагональ A_1C образует с плоскостью основания угол 45° . Найдите угол между прямой A_1C и плоскостью AB_1D_1 .

692. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ отношение высоты MO к стороне основания равно $2 : 3$. На диагонали AC отмечена точка K такая, что $AK : AC = 1 : 4$. Найдите угол между прямой MK и плоскостью MBD .

693. Точки M и N соответственно середины ребер CD и AD куба $A...D_1$. Найдите угол между плоскостью диагонального сечения AA_1C_1C и прямой C_1N .

694. В правильной четырехугольной призме $A...D_1$ диагональ A_1C образует с плоскостью основания угол 45° . Найдите угол между прямой A_1C и плоскостью B_1DE , где точка E — середина CC_1 .

695. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ боковое ребро образует с плоскостью основания угол 45° . На высоте MO пирамиды отмечена точка K — середина MO . Найдите угол между прямой DK и плоскостью MBC .

696. Точка M — середина ребра CC_1 куба $A...D_1$. Найдите угол между плоскостями A_1B_1C и BDM .

697. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями BMC_1 и B_1MC_1 , где M — середина ребра AC .

698. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями A_1ED и AA_1D .

699. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ высота $MO = AB$. Точки N , K и P соответственно середины ребер MA , AC и MC . Найдите угол между плоскостями BKP и BNK .

700. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный $\triangle ABC$, где $AC = BC = AA_1$. Известно, что P — середина ребра BB_1 . Найдите угол между плоскостями APC_1 и BCC_1 .

Раздел IV

РЕШЕНИЯ НАИБОЛЕЕ ТРУДНЫХ ЗАДАЧ

§ 1. Угол между двумя прямыми

4. Заметим, что угол между прямыми BB_1 и A_1C равен углу между прямыми AA_1 и A_1C . Пусть $\angle AA_1C = \alpha$, тогда из $\triangle AA_1C$ ($\angle A_1AC = 90^\circ$) имеем $\cos \alpha = \frac{AA_1}{A_1C}$, где

$AA_1 = 1$, A_1C — диагональ куба.

По свойству прямоугольного параллелепипеда, имеем

$$A_1C^2 = AB^2 + BC^2 + AA_1^2, \text{ или}$$

$$A_1C = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3} = \sqrt{3}, \text{ где } a = 1.$$

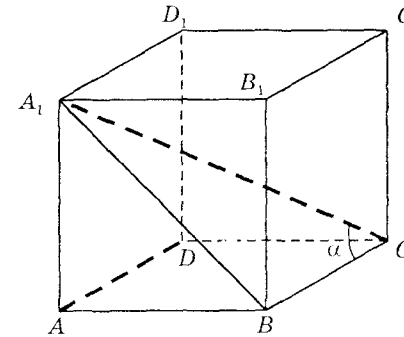
$$\text{Тогда } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ откуда } \alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

10. Угол между прямыми A_1C и AD равен углу между прямыми A_1C и BC , где $BC = AD = 1$ и $AD \parallel BC$.

Пусть $\angle A_1CB = \alpha$. Проведем диагональ A_1B грани AA_1B_1C , тогда из прямоугольного треугольника A_1BC , где $\angle A_1BC = 90^\circ$, находим

$$\cos \alpha = \frac{BC}{A_1C}.$$



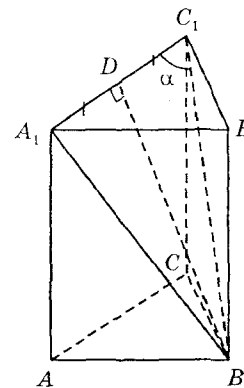
Поскольку куб является прямоугольным параллелепипедом, то по свойству диагонали имеем

$$A_1C^2 = AB^2 + BC^2 + BB_1^2, \text{ или } A_1C^2 = 3,$$

откуда $A_1C = \sqrt{3}$.

$$\text{Следовательно, } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



21. Угол между прямыми AC и BC_1 равен углу между прямыми BC_1 и A_1C_1 . Пусть $\angle A_1C_1B = \alpha$. Так как призма правильная, то $A_1B = C_1B$ как диагонали равных квадратов (по условию все ребра призмы равны 1). Значит, $\triangle A_1BC_1$ — равнобедренный. Проведем высоту BD .

$$\text{В } \triangle BDC_1 \quad DC_1 = \frac{1}{2} A_1C_1 = \frac{1}{2}.$$

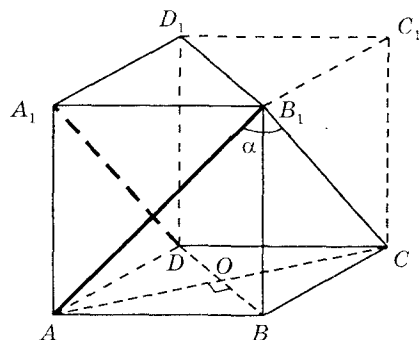
Из $\triangle C_1B_1B$ $BC_1^2 = 1 + 1 = 2$; $BC_1 = \sqrt{2}$.

Тогда $\cos \alpha = \frac{DC_1}{BC_1} = \frac{1/2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\alpha = \arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Ответ: $\arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$.

24. Построим призму $ABCA_1B_1C_1$ до четырехугольной призмы.

Так как $\triangle ABC$ — правильный, то $ABCD$ — ромб, где AD и BC — диагонали ромба.



Проведем диагональ B_1D боковой грани, тогда искомый угол между прямыми AB_1 и A_1C равен $\angle AB_1D = \alpha$.

В $\triangle AB_1D$ $AB_1 = B_1D = \sqrt{2}$. В $\triangle AOD$ $\angle OAB = 30^\circ$, тогда $AO = AB \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$, значит, $AD = 2 \cdot AO = \sqrt{3}$.

Следовательно, по теореме косинусов

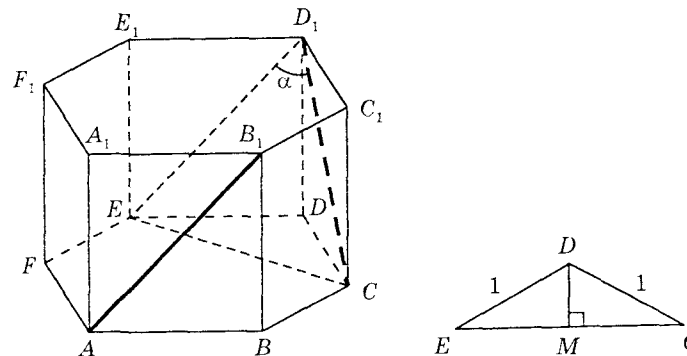
$$AD^2 = AB_1^2 + B_1D^2 - 2AB_1 \cdot B_1D \cos \alpha, \text{ или}$$

$$3 = 2 + 2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cos \alpha, \text{ откуда}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{4}, \alpha = \arccos \frac{1}{4}.$$

Ответ: $\arccos \frac{1}{4}$.

35. Угол между прямыми AB_1 и D_1C равен углу $CD_1E = \alpha$. Так как $D_1E = D_1C$ (как диагонали равных квадратов), то $\triangle ED_1C$ равнобедренный.



Из $\triangle EDD_1$ $ED_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Сторону CE найдем из $\triangle DEC$, где $DE = DC = 1$, $\angle EDC = 180^\circ \cdot (6-2) : 6 = 120^\circ$ (см. на плане), тогда $\angle EDM = 60^\circ$.

Из $\triangle EDM$ $ME = DE \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, тогда

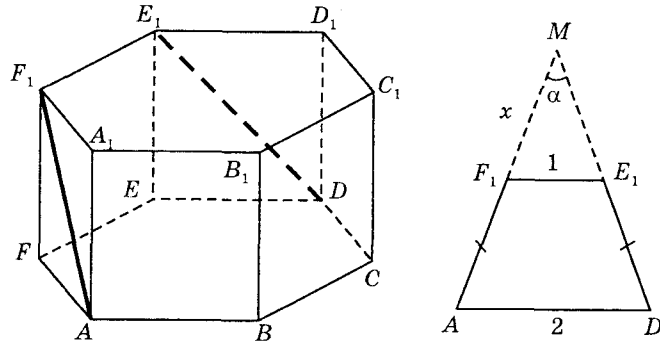
$$EC = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Из $\triangle ED_1C$ по теореме косинусов имеем $CE^2 = D_1E^2 + D_1C^2 - 2 \cdot D_1E \cdot D_1C \cos \alpha$, или $3 = 2 + 2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cos \alpha$, или $4 \cos \alpha = 1$,

откуда $\cos \alpha = \frac{1}{4}$, тогда $\alpha = \arccos \frac{1}{4}$.

Ответ: $\arccos \frac{1}{4}$.

36. Продолжим прямые AF_1 и CE_1 до пересечения в точке M и соединим точки A и D . Тогда AF_1E_1D — равнобедренная трапеция, а $\triangle AMD$ — равнобедренный.



$\angle AMD = \alpha$ — искомый угол между прямыми AF_1 и DE_1 . По условию задачи все ребра правильной призмы равны 1, тогда $F_1E_1 = 1$, $AD = 2$.

Из прямоугольного $\triangle F_1FA$, где $AF = FF_1 = 1$, $AF_1 = \sqrt{2}$.

Заметим, что $\triangle AMD \sim \triangle MF_1E_1$, следовательно, $\frac{MF_1}{F_1E_1} = \frac{MA}{AD}$, где $MF_1 = ME_1 = x$, или $\frac{x}{1} = \frac{x + \sqrt{2}}{2}$, отку-

да находим $x = \sqrt{2}$. Из $\triangle AMD$, где $AM = MD = 2\sqrt{2}$,

$AD = 2$, по теореме косинусов получим

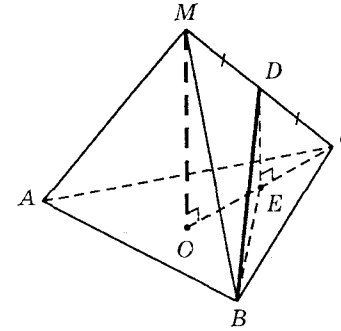
$$AD^2 = AM^2 + MD^2 - 2AM \cdot MD \cdot \cos \alpha, \text{ или}$$

$$4 = 8 + 8 - 16 \cos \alpha, 16 \cos \alpha = 12,$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{4}, \alpha = \arccos \frac{3}{4}.$$

Ответ: $\arccos \frac{3}{4}$.

54. Так как BD — медиана боковой грани MBC , то $MD = DC = \frac{1}{2}a$, где a — ребро правильного тетраэдра.



Из точки D опустим перпендикуляр DE на плоскость основания ABC , тогда $OE = EC$ — по теореме Фалеса. Так как $AB = a = R\sqrt{3}$, то $OC = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Высоту

MO тетраэдра найдем из $\triangle MOC$: $MO = \sqrt{MC^2 - OC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$. $DE = \frac{1}{2}MO = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}a = \frac{a}{\sqrt{6}}$ (средняя

линия $\triangle MOC$). $BE = \frac{1}{2}BC\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

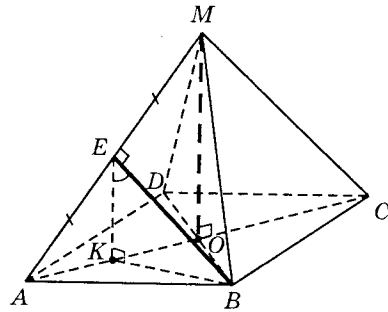
Пусть $\angle BDE = \alpha$ — угол между высотой и медианой BD , тогда $\cos \alpha = \frac{DE}{BD} = \frac{a}{\sqrt{6}} : BD$; $BD = \sqrt{BM^2 - MD^2} =$

$$= \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \text{ значит, } \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{6}} \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{3}, \text{ откуда } \alpha = \arccos \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\arccos \frac{\sqrt{2}}{3}$.

56. Из точки E — середины AM опустим перпендикуляр EK на плоскость основания $ABCD$. EK — средняя линия $\triangle AOM$. Так как высота $MO \perp (ABC)$ и $MO \parallel EK$, то $EK \perp (ABC)$, значит, $EK \perp BK$. Поскольку



$MO \parallel EK$, то угол между прямыми MO и медианой BE равен $\angle KEB = \alpha$. Поскольку все ребра пирамиды равны 1 (по условию), то из $\triangle ABE$, где $AB = 1$, $AE = \frac{1}{2}$,

$$BE = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

В $\triangle AOM$ $AO = MO$, тогда $AO^2 + MO^2 = AM^2$, или $2AO^2 = 1$,

$$AO^2 = \frac{1}{2}, AO = MO = \frac{1}{\sqrt{2}}, KE = \frac{1}{2} MO = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

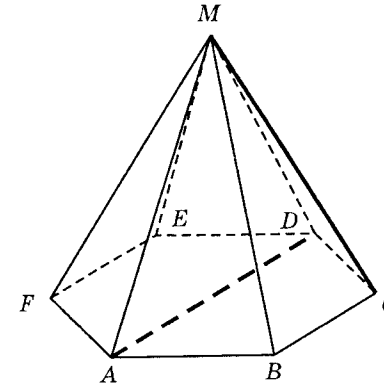
Теперь найдем искомый угол из $\triangle EKM$:

$$\cos \alpha = \frac{KE}{BE} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \text{ тогда}$$

$$\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

61. Поскольку $AD \parallel BC$, то угол между прямыми MC и AD равен углу между прямыми BC и MC .



Пусть $\angle MCB = \alpha$.

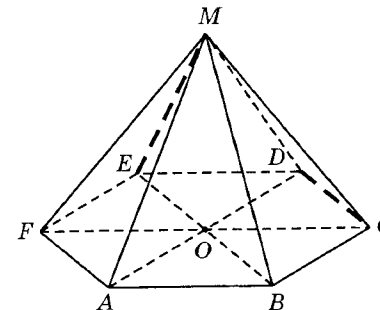
По условию задачи $BC = 1$, $MB = MC = 2$, тогда из $\triangle MBC$ по теореме косинусов имеем

$$MB^2 = MC^2 + BC^2 - 2MC \cdot BC \cdot \cos \alpha, \text{ или}$$

$$4 = 4 + 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos \alpha, \text{ откуда находим } \cos \alpha = \frac{1}{4},$$

$$\alpha = \arccos \frac{1}{4}.$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{1}{4}.$$



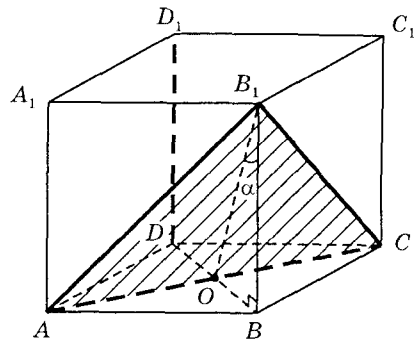
62. Известно, что в правильном шестиугольнике $a = R$, где a — сторона правильного шестиугольника, $R = AO = BO = EO = OF = OC$ — радиус описанной окружности. По условию $AB = 1$, $MA = 2$. Угол между

прямыми ME и CD равен углу между ME и BE . Но $ME = MB = BE = 2$, значит, $\triangle MEB$ — правильный и $\angle MEB = 60^\circ$.

Ответ: 60° .

§ 2. Угол между прямой и плоскостью

75. Проведем диагональ BD основания $ABCD$ и соединим вершину куба B_1 с точкой O пересечения диагоналей AC и BD .



Поскольку $DD_1 \parallel BB_1$ и $DD_1 = BB_1 = 1$, то из прямоугольного $\triangle B_1BO$, где $B_1B \perp BD$, найдем искомый $\angle OB_1B = \alpha$ — угол между прямой DD_1 и плоскостью ACB_1 .

В $\triangle B_1OB$ $BB_1 = 1$, $OB = OA = R = \frac{1}{\sqrt{2}}$, тогда

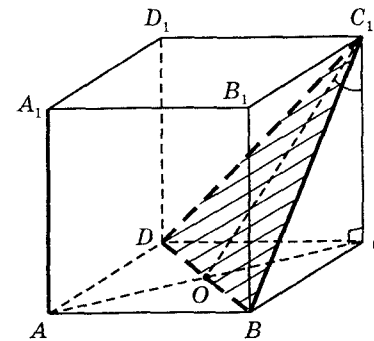
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OB}{BB_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Замечание. Можно доказать, что если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, то

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ и } \alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}. \text{ (Доказать самостоятельно.)}$$

77. Угол между прямой AA_1 и плоскостью BC_1D равен углу между прямой CC_1 и плоскостью BC_1D , т. е. $\angle OC_1C$.



В $\triangle OCC_1$ $CC_1 = 1$, $OC = R$ — радиус описанной окружности. Известно, что в правильном четырехугольнике со стороной a , $a = R\sqrt{2}$, откуда $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$,

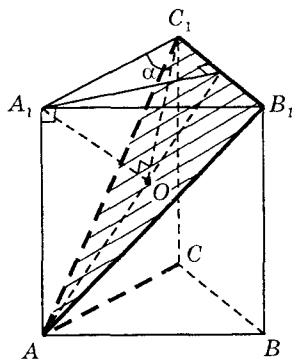
или $OC = \frac{1}{\sqrt{2}}$, где $a = 1$.

Из прямоугольного $\triangle OCC_1$ находим:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OC}{CC_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ где } \alpha = \angle OC_1C, \text{ тогда } \alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$.

82. Угол между прямой AC и плоскостью AB_1C_1 равен $\angle A_1C_1O = \alpha$, где точка O — основание перпендикуляра, опущенного из точки A_1 на плоскость AB_1C_1 .



Так как $AA_1 \perp (A_1B_1C_1)$, то $AA_1 \perp A_1D_1$.

Катет A_1D_1 найдем из прямоугольного $\triangle AA_1D_1C_1$, где

$$A_1C_1 = 1, C_1D_1 = \frac{1}{2} C_1B_1 = \frac{1}{2};$$

$$A_1D_1 = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Из $\triangle AA_1D_1$ найдем гипотенузу AD_1 :

$$AD_1 = \sqrt{AA_1^2 + A_1D_1^2}, AD_1 = \sqrt{1 + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Заметим, что $\triangle A_1OD_1 \sim \triangle AA_1D_1$ (как прямоугольные, имеющие общий острый угол A_1AO).

Имеем $\frac{A_1O}{A_1D_1} = \frac{AA_1}{AD_1}$, откуда

$$A_1O = \frac{A_1D_1 \cdot AA_1}{AD_1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1}{\frac{\sqrt{7}}{2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

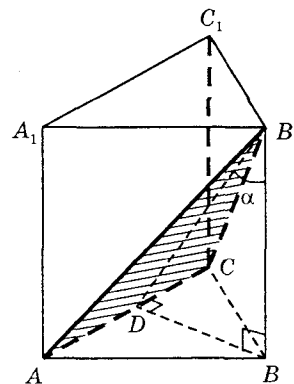
Из прямоугольного $\triangle A_1OC_1$, где катет $A_1O = \frac{\sqrt{21}}{7}$,

гипотенуза $A_1C_1 = 1$, находим искомый угол:

$$\sin \alpha = \frac{A_1O}{A_1C_1} = \frac{\sqrt{21}}{7}, \text{ откуда } \alpha = \arcsin \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Ответ: $\arcsin \frac{\sqrt{21}}{7}$.

83. Поскольку $CC_1 \parallel BB_1$ и $CC_1 = BB_1 = 1$, то угол между прямой CC_1 и плоскостью ACB_1 равен углу между прямой BB_1 и плоскостью ACB_1 .



Так как призма правильная, то $AB_1 = B_1C$ (как диагонали равных квадратов). Из вершины B_1 проведем высоту B_1D , которая является и медианой $\triangle AB_1C$, тогда $\angle DB_1B = \alpha$ — искомый угол.

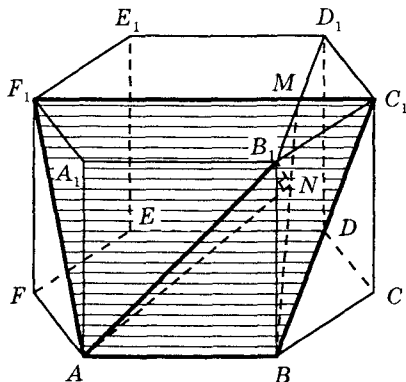
В $\triangle B_1DB$ $B_1B \perp BD$, BD найдем из прямоугольного $\triangle DCB$, где $BC = 1$, $CD = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2}$, тогда

$$BD = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Значит, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BD}{BB_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$.

92. Обозначим точку M — пересечение прямых F_1C_1 и B_1D_1 . Далее из точки B_1 опустим перпендикуляр B_1N на прямую BM . Тогда $\angle B_1AN = \alpha$ — искомый угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1 .



В прямоугольном $\triangle BB_1M$ известно: $BB_1 = 1$ (по условию), $B_1M = \frac{1}{2} B_1D_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (см. № 35), тогда

$$BM = \sqrt{BB_1^2 + B_1M^2}, \quad BM = \sqrt{1 + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

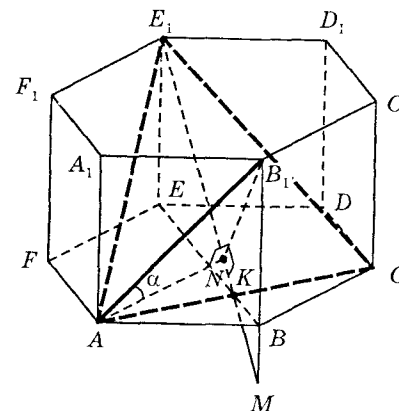
Заметим, что $\triangle B_1NM \sim \triangle BB_1M$ (как прямоугольные, имеющие общий угол B_1MN), тогда имеем $B_1N =$

$= \frac{\sqrt{21}}{7}$ (см. № 5). Так как $AB_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, то из

$$\triangle AB_1N \quad \sin \alpha = B_1N : AB_1 = \frac{\sqrt{42}}{14}, \quad \text{тогда } \alpha = \arcsin \frac{3}{\sqrt{42}}.$$

Ответ: $\arcsin \frac{3}{\sqrt{42}}$.

94. Заметим, что плоскость $BB_1E_1 \perp$ плоскости ACE_1 . Эти плоскости пересекаются по прямой ME_1 .



Так как $BB_1 \perp$ плоскости $A_1B_1C_1$, то $BB_1 \perp B_1E_1$.
 $B_1M = B_1B + BM = 1 + BM$,

$\triangle E_1B_1M \sim \triangle KBM$ ($E_1B_1 \parallel KB$), тогда $\frac{E_1B_1}{B_1M} = \frac{BK}{BM}$, где

$$E_1B_1 = 2, \quad BK = \frac{1}{2}.$$

Получим $\frac{2}{1+BM} = \frac{1/2}{BM}$, откуда $BM = \frac{1}{3}$.

$$\text{Значит, } B_1M = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Из вершины B_1 проведем высоту B_1N , где $N \in E_1M$, тогда $\angle B_1AN = \alpha$ — искомый угол между прямой AB_1 и плоскостью ACE_1 . Высоту B_1N найдем из $\triangle B_1E_1M$ сравнением $S_{\triangle B_1E_1M}$.

С одной стороны, $S_{\triangle B_1E_1M} = \frac{1}{2} E_1M \cdot B_1N$, а с другой стороны, $S_{\triangle B_1E_1M} = \frac{1}{2} B_1E_1 \cdot B_1M$, тогда

$$E_1M \cdot B_1N = B_1E_1 \cdot B_1M, \text{ где } B_1E_1 = 2, B_1M = \frac{4}{3},$$

$$E_1M = E_1K + KM.$$

$$\text{Из } \triangle AE_1K \quad E_1K = \sqrt{AE_1^2 - AK^2}, \quad AK = \frac{1}{2} AC = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Из } \triangle AE_1K \quad AE_1 = \sqrt{AE^2 + EE_1^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2.$$

$$\text{Значит, } E_1K = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Наконец, из $\triangle KBM$

$$KM = \sqrt{KB^2 + BM^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{6}.$$

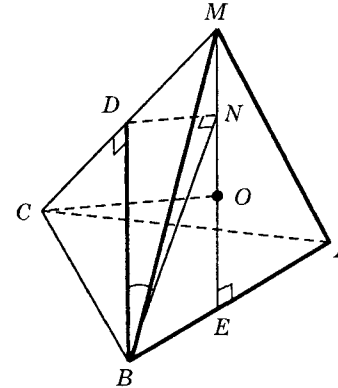
$$\text{Следовательно, } E_1M = \frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{\sqrt{13}}{6} = \frac{2\sqrt{13}}{3}.$$

$$\text{Используя соотношение } E_1M \cdot B_1N = B_1E_1 \cdot B_1M, \text{ находим } B_1N = \frac{B_1E_1 \cdot B_1M}{E_1M} = \frac{2 \cdot \frac{4}{3}}{\frac{2\sqrt{13}}{3}} = \frac{4}{\sqrt{13}}.$$

Тогда из прямоугольного $\triangle ANB_1$ ($AN \perp B_1N$), получим $\sin \alpha = \frac{B_1N}{AB_1} = \frac{4}{\sqrt{13}} : \sqrt{2} = \frac{4}{\sqrt{26}}$.

$$\text{Ответ: } \frac{4}{\sqrt{26}}.$$

104. Пусть в правильном тетраэдре $MABC$ $AB = 1$, ME — апофема грани MAB , O — центр правильного $\triangle MAB$. Так как $BD = ME$ как высоты правильных треугольников, то DN — средняя линия $\triangle MOC$, тогда $CO \perp (MAB)$, $CO \parallel DN$, значит, $DN \perp (MAB)$ и $\angle DBN = \alpha$ — искомый.



Поскольку $OE = ON = NM$ (N — середина MO), то $EN = \frac{2}{3} ME$. Из $\triangle AEM$, где $AM = 1$, $AE = \frac{1}{2}$,

$$ME = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ тогда } EN = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Сторону BN найдем из прямоугольного $\triangle BEN$:

$$BN = \sqrt{BE^2 + EN^2}, \quad BN = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{12}}.$$

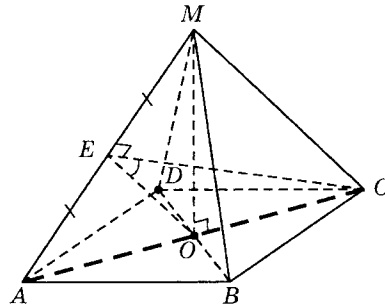
Наконец, из $\triangle BND$ найдем искомый угол:

$$\cos \alpha = \frac{BN}{BD} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{7}}{6} = \frac{\sqrt{7}}{3},$$

откуда $\alpha = \arccos \frac{\sqrt{7}}{3}$.

Ответ: $\alpha = \arccos \frac{\sqrt{7}}{3}$.

107. Пусть E — середина ребра AM . Так как диагонали AC и BD квадрата перпендикулярны и $MO \perp AC$, то плоскость $(MBD) \perp AC$. Значит, плоскость (MBD) и есть плоскость, проходящая через точку D перпендикулярно AC . Соединим точку E с точками O и C . Поскольку $\triangle MDC$ правильный, то $AM \perp CE$. В $\triangle AOM$ OE — медиана и высота, тогда $OE \perp AM$. Следовательно, $\angle OEC = \alpha$ — искомый угол.



Из $\triangle ABC$ $AC = \sqrt{2}$, тогда $OC = \frac{\sqrt{2}}{2}$; из $\triangle AOE$, где

$$AO = OC = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и } AE = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{2}, \text{ найдем}$$

$$OE = \sqrt{AO^2 - AE^2}, \text{ или } OE = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2};$$

из $\triangle ECM$ $CE = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Наконец, из $\triangle OEC$ по теореме косинусов имеем

$$OC^2 = OE^2 + CE^2 - 2 \cdot OE \cdot CE \cdot \cos \alpha, \text{ или}$$

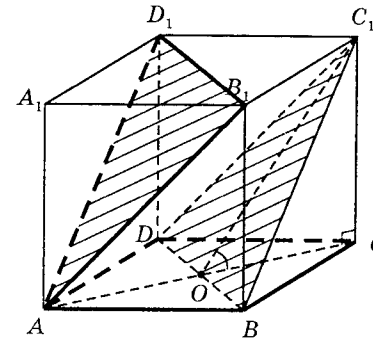
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \alpha, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha = \frac{1}{2},$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ откуда } \alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$.

§ 3. Угол между двумя плоскостями

116. Очевидно, что в единичном кубе $A...D_1$ плоскость $AB_1D_1 \parallel$ плоскости BC_1D , так как $BD = B_1D_1$, $AB_1 = DC_1$ и $AD_1 = BC_1$.



Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD квадрата $ABCD$. Тогда искомым линейным углом α между плоскостью ABC и плоскостью BC_1D будет $\angle C_1OC = \alpha$.

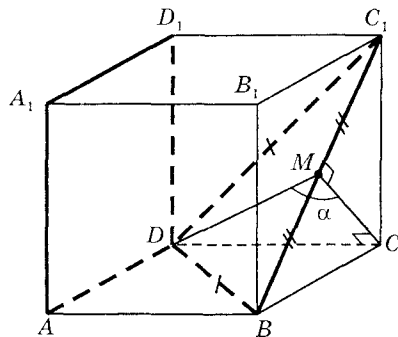
В прямоугольном $\triangle C_1OC$ ($\angle C = 90^\circ$), $CC_1 = 1$,

$OC = R = \frac{1}{\sqrt{2}}$, тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{CC_1}{OC} = \sqrt{2}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{2}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \sqrt{2}$.

119. Так как боковые грани AA_1D_1D и BB_1C_1C параллельны и равны, то искомый угол между плоскостями BDC_1 и ADD_1 равен углу между плоскостями BDC_1 и BCC_1 .



В $\triangle BDC_1$ $BD = DC_1 = C_1B$ — как диагонали граней куба. Проведем высоту DM $\triangle BDC_1$ и соединим точку M с вершиной C куба, тогда $\angle DMC = \alpha$ — искомый угол между плоскостями BCC_1 и BDC_1 .

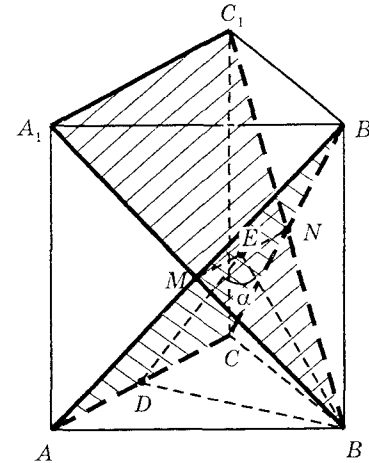
Заметим, что $\triangle CMD$ — прямоугольный, где катет $CD = 1$. $MC = MB = \frac{1}{2}BC_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Следовательно, из $\triangle DMC$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{DC}{MC} = \frac{1}{\sqrt{2}/2} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \quad \text{откуда } \alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{2}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \sqrt{2}$.

127. Плоскости AB_1C и A_1BC_1 пересекаются по прямой MN . Пусть E — середина MN и D — середина BD , тогда $\angle BED = \alpha$ — искомый.



Из $\triangle BDC$, где $\angle D = 90^\circ$, $BC = 1$ и $CD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}$,

найдем BD :

$$BD = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Так как $\triangle AB_1C = \triangle BA_1C_1$ (по трем сторонам), то

$$BE = DE, \quad MN = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}A_1C_1 = \frac{1}{2},$$

$$ME = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{4}, \quad MB = \frac{1}{2}A_1B = \frac{1}{2}\sqrt{1+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Из $\triangle BME$ $BE = \sqrt{MB^2 - ME^2}$, или

$$BE = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Из $\triangle BDE$ по теореме косинусов имеем

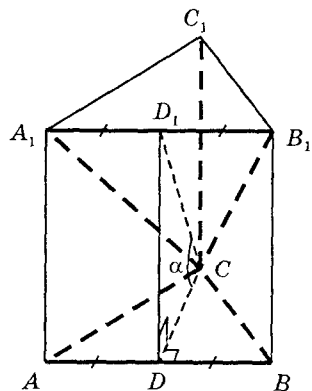
$$BD^2 = DE^2 + BE^2 - 2 \cdot DE \cdot BE \cdot \cos \alpha, \text{ или}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{7}{16} + \frac{7}{16} - 2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \cos \alpha, \quad \frac{3}{4} = \frac{7}{8} - \frac{7}{8} \cdot \cos \alpha,$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{7}, \text{ откуда } \alpha = \arccos \frac{1}{7}.$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{1}{7}.$$

128. Искомый угол между плоскостями ABC и A_1CB_1 измеряется линейным углом $DCD_1 = \alpha$, где D и D_1 — середины соответственно ребер AB и A_1B_1 .



Так как призма правильная, то $\triangle ABC$ — правильный, тогда CD — медиана и высота.

Из $\triangle CDB$, где $BD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}$, $BC = 1$, имеем

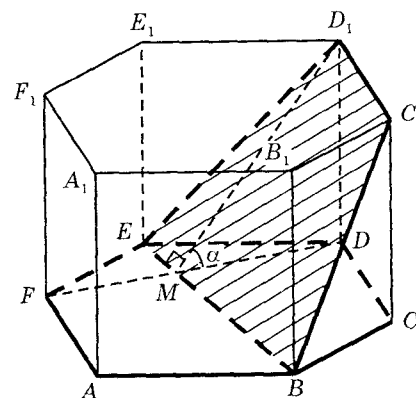
$$CD = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Из } \triangle CDD_1 \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{DD_1}{CD} = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \text{ откуда}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

138. В плоскости BED_1 из точки D_1 опустим перпендикуляр D_1M на плоскость основания призмы. Так как $FE = ED$ и диагональ BE проходит через центр основания, то EM — медиана, биссектриса и высота $\triangle FED$, тогда M — середина FD .



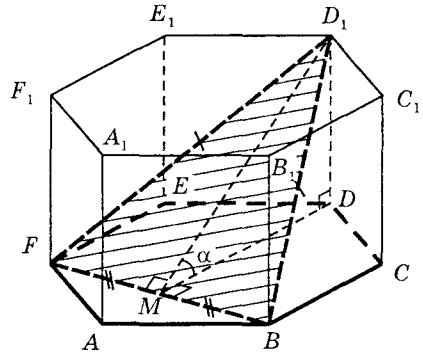
В прямоугольном $\triangle MDD_1$ имеем $DD_1 = 1$,

$$MD = \frac{1}{2}FD = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (см. № 35), тогда } \operatorname{tg} \alpha = \frac{DD_1}{MD}, \text{ или}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \text{ откуда } \alpha = \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

140. Угол между плоскостями ABC и FBD_1 равен $\angle D_1MD = \alpha$.



Так как призма правильная, то $D_1F = D_1B$, тогда DM — высота и медиана $\triangle D_1FB$.

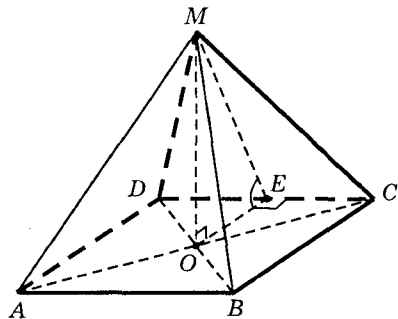
Из прямоугольного $\triangle MDD_1$, где $DD_1 = 1$,

$$MD = AD - AM = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \text{ имеем}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{DD_1}{MD} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}, \text{ откуда } \alpha = \operatorname{arctg} \frac{2}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{arctg} \frac{2}{3}.$$

147. В плоскости боковой грани MDC проведем высоту ME . Так как все ребра пирамиды равны 1, то $\triangle MDC$ —



равильный. Из $\triangle MEC$, где $MC = 1$, $CE = \frac{1}{2}$, $ME =$

$$\sqrt{MC^2 - CE^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Из точки } O \text{ пересечения диагоналей основания проведем высоту } OE, \text{ тогда } \angle OEM = \alpha \text{ — искомый угол между плоскостями } ABC \text{ и } MDC.$$

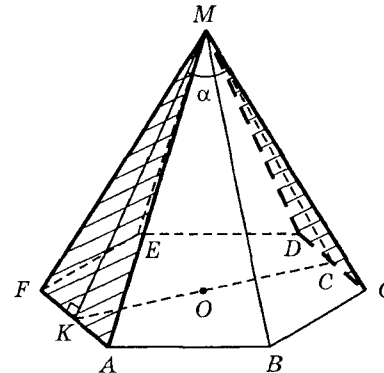
$$OE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \text{ — средняя линия } \triangle ADC.$$

$$\text{В } \triangle MOE \cos \alpha = \frac{OE}{ME} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ откуда}$$

$$\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

150. Так как пирамида правильная, то грани MAF и MDC равные равнобедренные треугольники, боковые ребра которых равны 2, а основания 1.



Тогда $\angle KMP$ — искомый угол между плоскостями. Апофему (высоту) MK найдем из прямоугольного $\triangle AMK$, где $AM = 2$, $AK = \frac{1}{2}AF = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$,

$$\text{тогда } MK = \sqrt{2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Известно, что в правильном шестиугольнике $a = R$, где $a = AB = 1$, $R = AO = AB = 1$, тогда из $\triangle AOK$ $OK = \sqrt{AO^2 - AK^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, значит, $KP = \sqrt{3}$, следо-

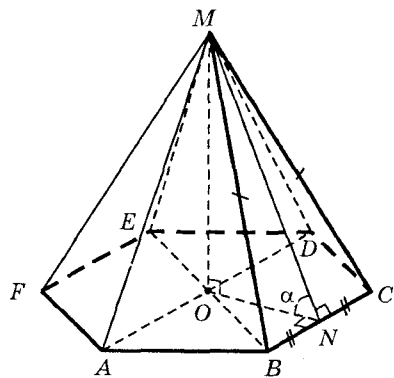
вательно, из $\triangle KMC$ по теореме косинусов имеем $KP^2 = MK^2 + MP^2 - 2 \cdot MK \cdot MP \cos \alpha$, где $\alpha = \angle KMC$.

$$3 = \frac{15}{4} + \frac{15}{4} - 2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{2} \cos \alpha, \text{ или } 15 \cos \alpha = 9,$$

$$\cos \alpha = 0,6.$$

Ответ: 0,6.

151. Проведем апофему MN правильной пирамиды и соединим центр основания с точкой N , тогда $\angle ONM = \alpha$ — искомый угол между плоскостями ABC и MBC .



Длину ON найдем из $\triangle OBN$, где $ON \perp BC$,

$$OB = AB = 1, BN = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Значит, } ON = \sqrt{OB^2 - BN^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Длину апофемы MN найдем из $\triangle MBN$, где $MB = 2$,

$$\text{тогда } MN = \sqrt{2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{15}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Наконец, из $\triangle MON$, где $MO \perp ON$, найдем искомый

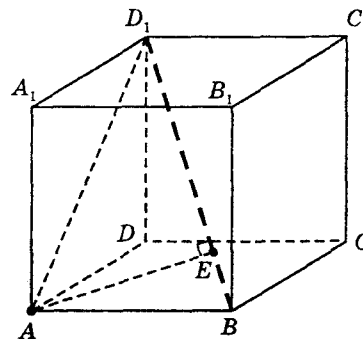
$$\angle MNO = \alpha; \cos \alpha = \frac{ON}{MN} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

§ 4. Расстояние от точки до прямой

162. Расстояние от точки A до прямой BD_1 есть длина перпендикуляра AE .

Так как $A...D_1$ — единичный куб, то длины всех ребер равны 1. Применим метод сравнения площадей.



$$S_{\triangle DAB} = \frac{1}{2} AB \cdot AD_1 = \frac{1}{2} BD_1 \cdot AE, \text{ откуда}$$

$$AE = \frac{AB \cdot AD_1}{BD_1}, \text{ где } AB = 1,$$

$$AD_1 = \sqrt{AD^2 + DD_1^2} = \sqrt{2},$$

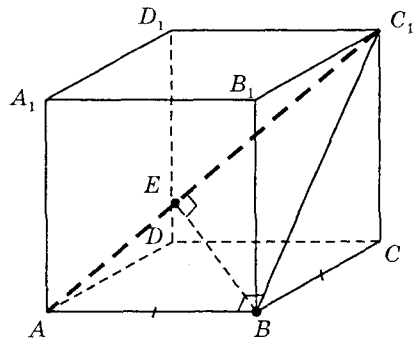
$$BD_1^2 = AB^2 + BC^2 + AA_1^2 \text{ (по свойству прямоугольного}$$

$$\text{параллелепипеда), } BD_1 = \sqrt{3}, \text{ тогда } AE = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Замечание. Задачу можно решить другими способами.

164. Расстояние от точки B до прямой AC_1 есть длина перпендикуляра BE .



Длину BE найдем методом сравнения площадей.

$$S_{\triangle ABC_1} = \frac{1}{2} AB \cdot BC_1, \text{ где } AB \perp BC_1, AB = 1 \text{ и } BC_1 = \sqrt{2}.$$

$$\text{С другой стороны, } S_{\triangle ABC_1} = \frac{1}{2} AC_1 \cdot BE,$$

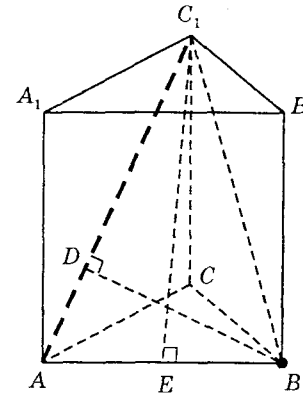
$$\text{где } AC_1 = \sqrt{AB^2 + BC^2 + BB_1^2} = \sqrt{3}.$$

$$\text{Следовательно, } \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot BE, \text{ откуда находим}$$

$$BE = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

170. Расстояние от точки B до прямой AC_1 есть длина перпендикуляра BD . Проведем диагональ BC_1 боковой грани, а из точки C_1 проведем высоту C_1E равнобедренного $\triangle AC_1B$.



Применим метод сравнения площадей:

$$S_{\triangle AC_1B} = \frac{1}{2} AC_1 \cdot BD = \frac{1}{2} AB \cdot C_1E, \text{ откуда}$$

$$BD = \frac{AB \cdot C_1E}{AC_1}.$$

Так как длины всех ребер призмы равны 1 (по условию), то $AB = 1$. Из $\triangle AC_1E$, где $AE = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2}$, $AC_1 =$

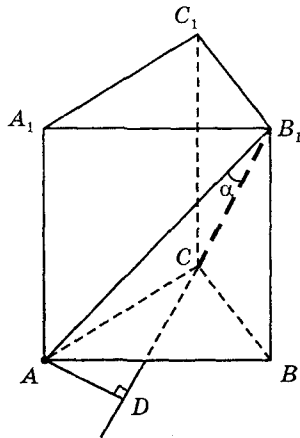
$= \sqrt{AC^2 + CC_1^2}$, или $AC_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$; C_1E найдем из прямоугольного $\triangle AEC_1$:

$$C_1E = \sqrt{AC_1^2 - AE^2} = \sqrt{2 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

$$\text{Тогда } BD = \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

171. Из точки A опустим перпендикуляр на продолжение прямой B_1C . Пусть D — точка пересечения, $\angle AB_1D = \alpha$.



Так как призма правильная и все ребра равны 1, то $\angle AB_1C$ найдем из $\triangle ACB_1$ по теореме косинусов, где $AC = 1$, $AB_1 = B_1C = \sqrt{2}$ (как диагонали равных квадратов AA_1B_1B и BB_1C_1C).

Имеем $AC^2 = AB_1^2 + B_1C^2 - 2AB_1 \cdot B_1C \cdot \cos \alpha$, или

$$1 = 2 + 2 - 2 \cdot 2 \cdot \cos \alpha, \text{ откуда } \cos \alpha = \frac{3}{4}.$$

Поскольку $\angle AB_1C$ — острый, то

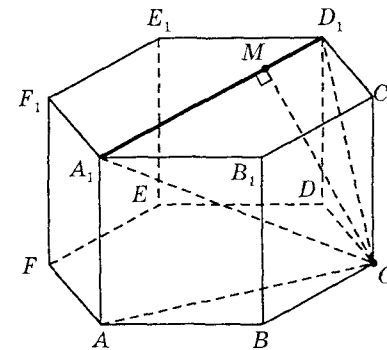
$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Из $\triangle ADB_1$ находим искомое расстояние AD :

$$AD = AB_1 \sin \alpha = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

196. Расстояние от точки C до прямой A_1D_1 есть длина перпендикуляра CM .



Соединим точку C с точками A_1 и D_1 .

Из $\triangle AA_1C$, где $AC = \sqrt{2}$, $AA_1 = 1$, имеем

$$A_1C = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = 2; \text{ из } \triangle CC_1D_1, \text{ где } CC_1 = 1, D_1C_1 = 1,$$

$$\text{имеем } CD_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Кроме того, $A_1D_1 = 2$.

Пусть $MD_1 = y$, $A_1M = 2 - y$.

Из $\triangle MD_1C$ $CM^2 = 2 - y^2$;

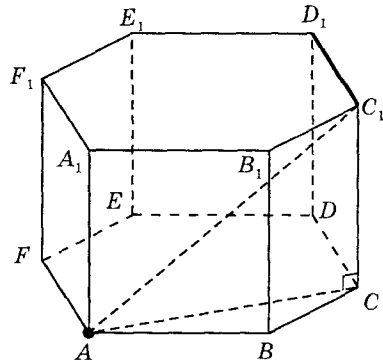
из $\triangle A_1MC$ $CM^2 = 4 - (2 - y)^2$.

Сравнивая правые части полученных равенств, получим $2 - y^2 = 4 - (2 - y)^2$, или $2 - y^2 = 4 - 4 + 4y - y^2$, откуда находим $y = \frac{1}{2}$.

$$\text{Тогда } CM^2 = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}, \quad CM = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

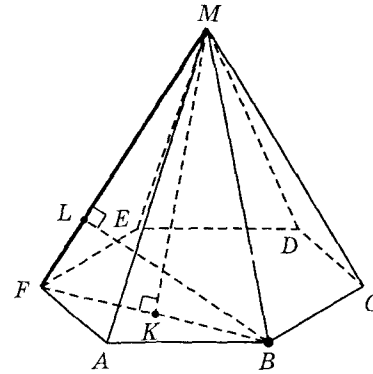
200. Соединим точку A с точками C и C_1 . Заметим, что в правильном шестиугольнике $AC \perp AF$, так как $\angle FAB = 180^\circ \cdot (6 - 2) : 6 = 120^\circ$, а $\angle BAC = 30^\circ$. Кроме того, AC — проекция AC_1 на плоскость основания



призмы. По теореме о 3-х перпендикулярах имеем $BC_1 \perp C_1D_1$. Следовательно, AC_1 — искомое расстояние от точки A до прямой C_1D_1 . В прямоугольном $\triangle ACC_1$ $CC_1 = 1$, $AC = \sqrt{3}$ (см. № 35), тогда $AC_1 = \sqrt{1+3} = 2$.

Ответ: 2.

204. Расстояние от точки B до прямой MF есть длина перпендикуляра BL . Соединим точки B и F , проведем высоту MK в равнобедренном $\triangle MFB$. Применяя метод сравнения площадей к $\triangle MFB$, имеем



$$\frac{1}{2} MF \cdot BL = \frac{1}{2} BF \cdot MK,$$

откуда $BL = \frac{BF \cdot MK}{MF}$, где $BF = \sqrt{3}$ (см. № 35), $MF = 2$

(по условию), MK найдем из прямоугольного $\triangle FKM$:

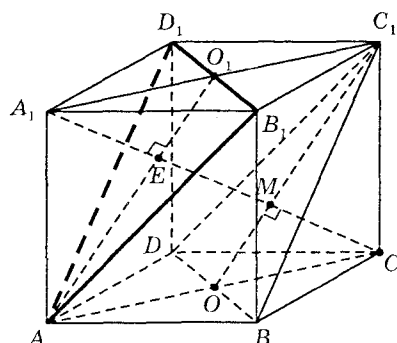
$$MK = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}, \text{ тогда}$$

$$BL = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{13}}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{39}}{4}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{39}}{4}.$$

§ 5. Расстояние от точки до плоскости

214. Соединим вершину C_1 куба с точками B и D . Поскольку $BD = B_1D_1$, то плоскость $AB_1D_1 \parallel C_1DB$. Кроме того, $A_1N = CM$.



Расстоянием от точки C до плоскости AB_1D_1 будет длина перпендикуляра CN .

Заметим, что $CN = CA_1 - A_1N$, где $A_1C = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$.

CM найдем из прямоугольного $\triangle OCC_1$, где

$$OC = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad OC_1 = \sqrt{OC^2 + CC_1^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$S_{\triangle OCC_1} = \frac{1}{2}OC_1 \cdot CM = \frac{1}{2}OC \cdot C_1C, \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot CM = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1,$$

$$\text{откуда} \quad CM = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad CM = A_1N = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

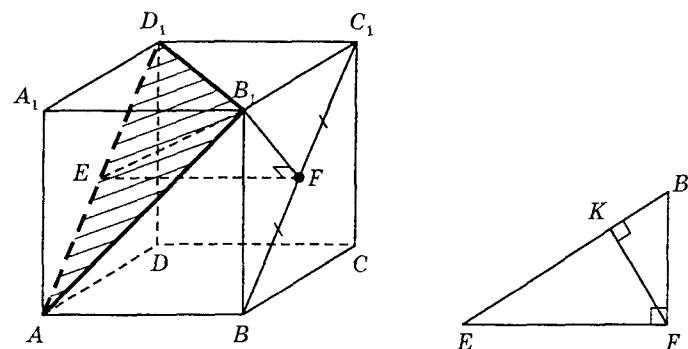
Следовательно, искомое расстояние

$$CN = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

218. Так как $A...D_1$ — единичный куб и F — середина BC_1 , то E — середина AD_1 ($BC_1 = AD_1$ как диагонали граней куба).

Из точки F проведем перпендикуляр FK к плоскости AB_1D_1 (см. рис. на плане), $FE \perp AD_1$, значит,



$KE \perp AD_1$, следовательно, точка K лежит на отрезке $B_1E \perp AD_1$ ($B_1D_1 = B_1A$ как диагонали граней куба, E — середина AD_1 , значит, B_1E — медиана и высота равнобедренного $\triangle AB_1D_1$).

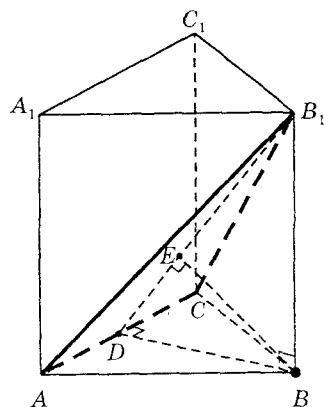
Отрезок FK — расстояние от точки F до плоскости AB_1D_1 .

Имеем $\frac{1}{2}FK \cdot B_1E = \frac{1}{2}EF \cdot FB_1$, откуда

$$FK = \frac{EF \cdot FB_1}{B_1E} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}/2}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

221. Плоскость AB_1C представляет собой равнобедренный треугольник, где $AB_1 = B_1C$ как диагонали равных квадратов (все ребра правильной призмы равны 1 по условию задачи), тогда B_1D — высота и медиана $\triangle AB_1C$. Соединим точки B и D . Искомым расстоянием от точки B до плоскости AB_1C будет расстояние BE от точки B до прямой B_1D . Применяя метод сравнения площадей к $\triangle B_1BD$, имеем



$$\frac{1}{2} B_1 D \cdot BE = \frac{1}{2} BB_1 \cdot BD,$$

откуда $BE = \frac{BB_1 \cdot BD}{B_1 D}$, где $BB_1 = 1$, $BD = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (находим

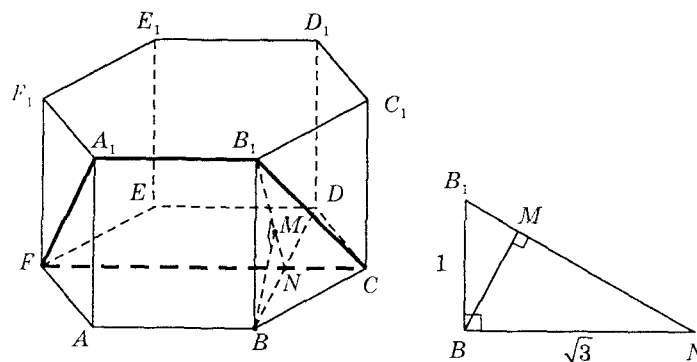
$$\text{из } \triangle BDC), B_1 D = \sqrt{BB_1^2 + BD^2} = \sqrt{1 + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

$$\text{Тогда } BE = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

237. Искомое расстояние от точки B до плоскости CFA_1 равно высоте AM прямоугольного $\triangle B_1NB$ ($\angle B_1BN = 90^\circ$), где $BB_1 = 1$, $BN = \frac{1}{2}BD = \frac{\sqrt{3}}{2}$, тогда

$$B_1N = \sqrt{1+3} = 2.$$



Заметим, что $\triangle B_1BN \sim \triangle BMN$ (как прямоугольные, имеющие общий острый угол N), тогда $\frac{BM}{BN} = \frac{BB_1}{B_1N}$,

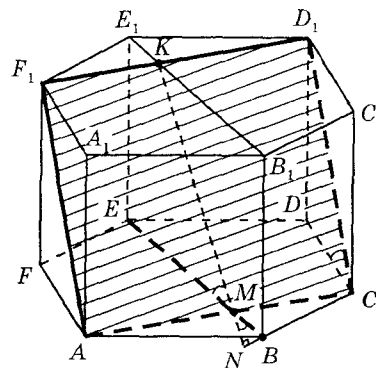
$$\text{откуда } BM = \frac{\sqrt{3} \cdot 1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Замечание. BM можно найти из соотношения

$$S_{\triangle B_1BN} = \frac{1}{2} BB_1 \cdot BN = \frac{1}{2} B_1N \cdot BM \text{ и т. д.}$$

241. Пусть M — точка пересечения прямых AC и BE . Заметим, что угол между прямой BE и плоскос-



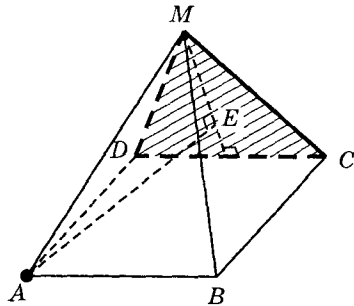
тью ACD_1 равен углу между прямыми CD и CD_1 . Так как $\angle DCD_1 = 45^\circ$, то $\angle KME = \angle D_1CD = \angle BMN = 45^\circ$, где BN перпендикуляр, опущенный из точки B на плоскость ACD , т. е. $BN = BM \sin 45^\circ$.

В $\triangle MBC$ $\angle MCB = 30^\circ$, $BC = 1$, тогда $MB = \frac{1}{2}$.

Значит, $BN = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

242. Поскольку все ребра правильной четырехугольной пирамиды $MABCD$ равны 1, то $\triangle MDC$ — равнобедренный, где точки E — центр треугольника, $ME = R$ — радиус описанной окружности.

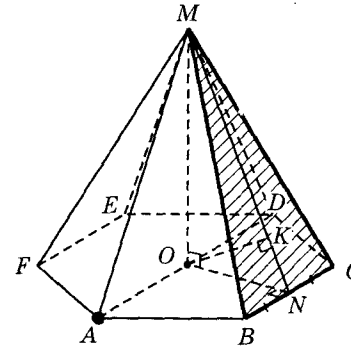


Так как $a = R\sqrt{3}$, где $a = DC = 1$, $R = ME$, то $ME = 1/\sqrt{3}$. Тогда искомым расстоянием от точки A до плоскости MDC будет длина перпендикуляра AE . Из $\triangle AME$, где $AM = 1$, $ME = 1/\sqrt{3}$, найдем AE :

$$AE = \sqrt{AM^2 - ME^2}, \text{ или } AE = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

246. Поскольку прямая $AD \parallel BC$, то $AD \parallel$ плоскости MBC , значит, расстояние от точки A до плоскости MBC равно расстоянию от точки O до плоскости MBC .



Проведем апофему MN . Так как боковые грани пирамиды равны равнобедренные треугольники, то N — середина BC и $ON \perp BC$ (ON — радиус вписанной в основание окружности, N — точка касания). Искомым расстоянием от точки A до плоскости MBC будет длина перпендикуляра OK . Расстояние OK найдем методом сравнения площадей прямоугольного $\triangle MON$ ($MO \perp ON$), где $ON = \sqrt{3}/2$. Длину MO найдем из $\triangle AOM$: $AO = AB = 1$, $AM = 2$, тогда $MO = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$.

Из $\triangle MON$ $MN = \sqrt{MO^2 + ON^2}$,

$$MN = \sqrt{3 + 3/4} = \sqrt{15/4} = \sqrt{15}/2.$$

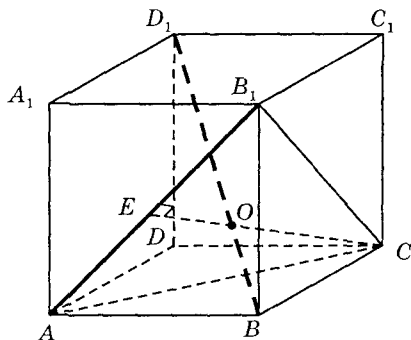
$S_{\triangle MON} = \frac{1}{2} MO \cdot ON = \frac{1}{2} MN \cdot OK$, откуда

$$OK = \frac{MO \cdot ON}{MN} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}/2}{\sqrt{15}/2} = \frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{3\sqrt{15}}{15} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

§ 6. Расстояние между двумя прямыми

258. Проведем диагональ BD_1 куба и диагонали AC основания и B_1C — боковой грани.



Заметим, что $BD_1 \perp$ плоскости AB_1C , O — точка их пересечения.

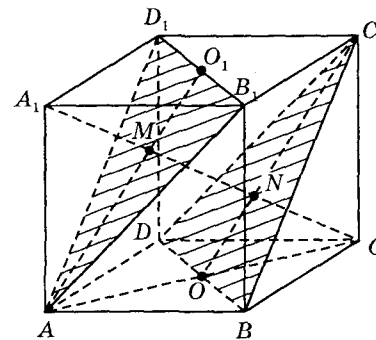
Так как $\triangle AB_1C$ — правильный ($AC = AB_1 = B_1C$), то OE — радиус вписанной окружности.

Поскольку $AC = \sqrt{2}$, то по формуле $a_3 = 2r\sqrt{3}$,

где $a_3 = AC$, $r = OE$, имеем $OE = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

262. Поскольку $BD \parallel B_1D_1$, $AB_1 \parallel DC_1$ и $AD_1 \parallel BC_1$, то плоскость $AB_1D_1 \parallel$ плоскости BDC_1 . Значит, расстояние между данными скрещивающимися прямыми равно расстоянию MN между этими плоскостями, где M и N — точки пересечения диагонали A_1C соответственно с плоскостью AB_1D_1 и плоскостью BDC_1 . Итак, длина MN есть расстояние между данными прямыми AB_1 и BC_1 . В $\triangle AMC$ $AM \parallel ON$. Так как O — середина AC



и $ON \parallel AM$, то по теореме Фалеса N — середина MC , значит, ON — средняя линия $\triangle AMC$. Аналогично, MO_1 — средняя линия $\triangle A_1NC_1$, т. е. $A_1M = MN$.

Следовательно, $MN = \frac{1}{3}A_1C$.

Так как $AC = \sqrt{2}$, $AA_1 = 1$, то из $\triangle A_1AC$

$A_1C = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$, тогда $MN = \sqrt{3}/3$.

Ответ: $\sqrt{3}/3$.

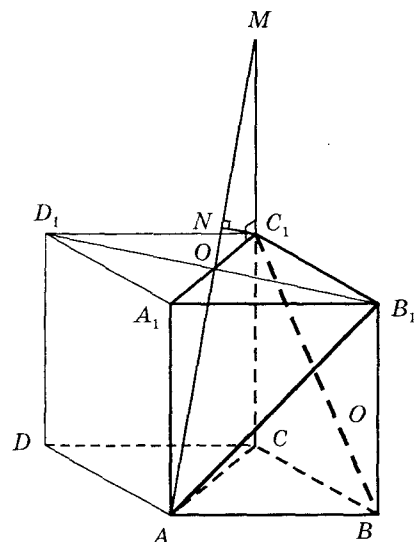
267. Построим призму $ABCA_1B_1C_1$ до правильной четырехугольной $ABCA_1B_1C_1D_1$. Пусть O — точка пересечения диагоналей A_1C_1 и B_1D_1 .

Продолжим прямые AO и CC_1 до пересечения в точке M .

Заметим, что $CC_1 = C_1M = 1$. Тогда искомое расстояние между прямыми AB_1 и BC_1 будет равно расстоянию от прямой BC_1 до плоскости AB_1D_1 , т. е. длина перпендикуляра C_1N .

Так как призма $ABCA_1B_1C_1$ — правильная, все ребра которой равны 1 (по условию задачи), то

$$OC_1 = \frac{1}{2}A_1C_1 = \frac{1}{2}, C_1M = 1.$$



Из прямоугольного $\triangle O C_1 M$

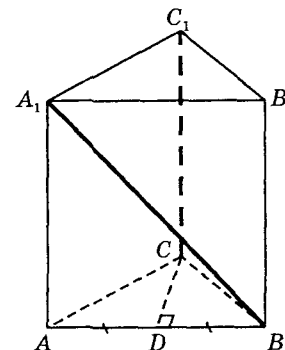
$$OM = \sqrt{OC_1^2 + C_1M^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$S_{\Delta OC_1 M} = \frac{1}{2} OC_1 \cdot C_1 M = \frac{1}{2} OM \cdot C_1 N_1, \text{ откуда}$$

$$C_1N = \frac{OC_1 \cdot C_1M}{OM} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

271. Поскольку прямая A_1B пересекается с прямой AA_1 и лежит в плоскости ABB_1 , параллельной CC_1 , то искомое расстояние между прямыми CC_1 и A_1B равно расстоянию от прямой CC_1 до плоскости ABB_1 . В основании призмы проведем высоту CD . Заметим, что $CD \perp BB_1$, так как $BB_1 \perp$ плоскости ABC . Значит, CD — искомое расстояние.

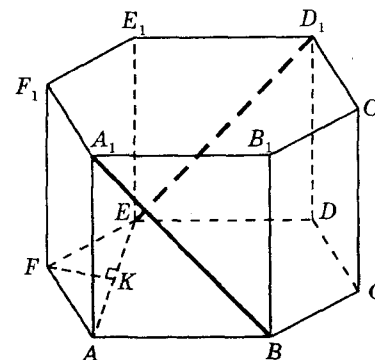


В равностороннем $\triangle ABC$ $AC = 1$, $AD = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2}$,

тогда из $\triangle ACD$ $CD = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

282. Искомым расстоянием между прямыми A_1B и D_1E будет расстояние между параллельными плоскостями ABB_1 и DEE_1 , т. е. AE (или BD).



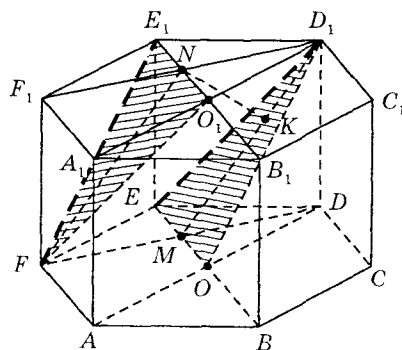
В $\triangle AFE$ $AF = FE = 1$, $\angle AFE = 120^\circ$, тогда $\angle EFK = 60^\circ$.

$$\text{Из } \triangle FEK \quad EK = FE \sin 60^\circ = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Значит, } AE = 2 \cdot EK = \sqrt{3}.$$

Ответ: $\sqrt{3}$.

284. Проведем диагонали оснований призмы. Пусть O и O_1 — точки их пересечения. Далее соединим точку O с вершиной D_1 , а точку O_1 с вершиной F . FN — высота равнобедренного $\triangle FE_1O_1$, D_1M — высота равнобедренного $\triangle D_1EO$. Заметим, что плоскость $FE_1O_1 \parallel$ плоскости D_1EO , а плоскость $FDD_1 \perp$ плоскости FE_1O_1 и плоскость $FDD_1 \perp$ плоскости FE_1O_1 .



Тогда NK — искомое расстояние между прямыми FE_1 и ED_1 .

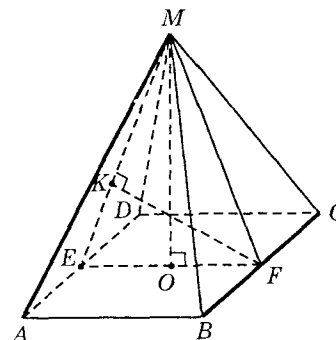
$$\text{В параллелограмме } FND_1M \text{ высота } NM = FF_1 = 1, \\ F_1N = FM = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Из } \triangle FF_1N \quad FN = \sqrt{FF_1^2 + F_1N^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Следовательно, $S_{FND_1M} = FM \cdot NM = FN \cdot NK$, или

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot NK, \text{ откуда } NK = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

286. Так как $BC \parallel AD$, то $BC \parallel$ плоскости AMD . Значит, расстояние между скрещивающимися прямыми AM и BC равно расстоянию от прямой BC до плоскости AMD .



Соединим точки E и F соответственно середины ребер AD и BC . Тогда высота FK $\triangle MEF$ будет искомым расстоянием. В $\triangle MEF$ $EF = AB = 1$; ME найдем из $\triangle AME$, где $AE = \frac{1}{2}$, $AM = 1$, $ME = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Высоту MO пирамиды найдем из $\triangle MOE$:

$$MO = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ где } OE = \frac{1}{2} EF.$$

Из сравнения площадей $\triangle MEF$ имеем

$$\frac{1}{2} \cdot ME \cdot FK = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot MO, \text{ откуда}$$

$$FK = \frac{EF \cdot MO}{ME} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

291. Проведем высоту MO пирамиды и диагональ AD основания. Пусть K — точка пересечения прямой CE и AD . Тогда расстоянием между скрещивающимися

$$S = 2 \cdot S_{EKNF} = 2 \cdot \frac{KN + EF}{2} \cdot KL = (KN + EF) \cdot KL,$$

где KL — высота трапеции.

$$\text{Из } \triangle KA_1E \quad KE = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{89}}{10}.$$

$$\text{Из } \triangle KEL \quad KL = \sqrt{KE^2 - EL^2}.$$

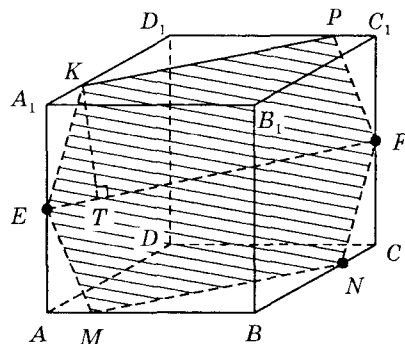
$$\text{Но } EL = \frac{1}{2}(EF - KN) = \frac{2\sqrt{2}}{5}, \text{ тогда}$$

$$KL = \sqrt{\frac{89}{100} - \frac{8}{25}} = \frac{\sqrt{57}}{10}.$$

$$\text{Значит, } S = \left(\frac{\sqrt{2}}{5} + \sqrt{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{57}}{10} = \frac{6\sqrt{2} \cdot \sqrt{57}}{5 \cdot 10} = \frac{3\sqrt{114}}{25}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{3\sqrt{114}}{25}.$$

307. Сечение представляет собой шестиугольник $EMNFPKE$, противоположные стороны которого соответственно параллельны (построение и доказательство выполнить самостоятельно).



По условию задачи ребро куба равно 1 и

$$CN = 0,25 = \frac{1}{4}, \text{ тогда } BN = \frac{3}{4}.$$

Соединим точки E и F , которые являются серединами соответственно ребер AA_1 и CC_1 .

Тогда $EF \parallel KP \parallel MN \parallel A_1C_1 \parallel AC$.

Из $\triangle ABC$, где $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC = 1$, имеем $AC = \sqrt{2}$.

Значит, $AC = EF = \sqrt{2}$. Из $\triangle KD_1P$, где $KD_1 = D_1P =$

$$= BN = \frac{3}{4}, \text{ находим } KP = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{3}{4}\sqrt{2}.$$

Так как противоположные стороны сечения параллельны и равны, то трапеция $EKPF$ — равнобедренная и $S_{\text{сеч.}} = 2S_{EKPF} = 2 \cdot \frac{KP + EF}{2} \cdot KT = (KP + EF) \cdot KT$,

где KP и EF — основания, KT — высота трапеции.

$$\text{Из } \triangle EA_1K, \text{ где } A_1E = \frac{1}{2}A_1A = \frac{1}{2}, A_1K = NC = \frac{1}{4},$$

$$\text{находим } KE = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

Высоту KT трапеции найдем из $\triangle KET$, где

$$ET = \frac{1}{2}(EF - KP) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - \frac{3}{4}\sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{8}, \text{ тогда}$$

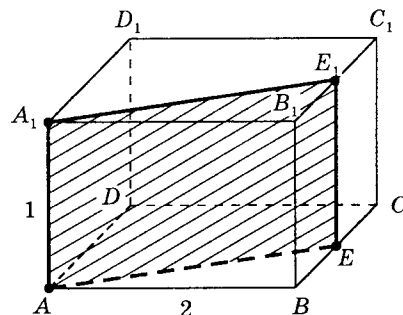
$$KT = \sqrt{KE^2 - ET^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{64}} = \frac{3\sqrt{2}}{8}.$$

Следовательно,

$$S_{\text{сеч.}} = \left(\frac{3\sqrt{2}}{4} + \sqrt{2} \right) \cdot \frac{3\sqrt{2}}{8} = \frac{7\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{8} = \frac{21}{16}.$$

Ответ: $\frac{21}{16}$.

311. Так как $AA_1 \perp (ABCD)$, то $AA_1 \perp AE$, значит, четырехугольник AA_1E_1E — прямоугольник, где $AA_1 = 1$.



Длину AE найдем из прямоугольного $\triangle ABE$, где $AB = 2$,

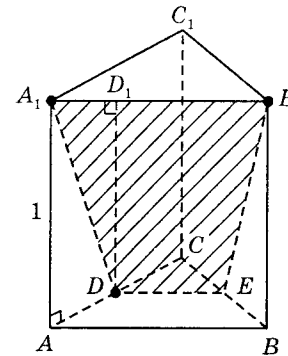
$BE = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2}$, тогда $AE = \sqrt{AB^2 + BE^2}$, или

$$AE = \sqrt{4 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

Значит, $S_{AA_1E_1E} = AA_1 \cdot AE = \frac{\sqrt{17}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

316. Сечение, проходящее через данные точки A_1 , B_1 и D , представляет собой равнобедренную трапецию (доказать самостоятельно), где $A_1B_1 = 1$, $DE = \frac{1}{2}$ (средняя линия $\triangle ABC$).



Боковую сторону A_1D найдем из прямоугольного $\triangle A_1AD$, где $AA_1 = 1$, $AD = \frac{1}{2}$, тогда

$$A_1D = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Из вершины D опустим на основание A_1B_1 высоту трапеции DD_1 , тогда

$$A_1D_1 = \frac{1}{2}(A_1B_1 - DE) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

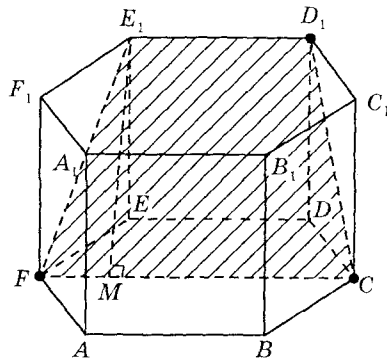
$$\text{Из } \triangle A_1D_1D \quad DD_1 = \sqrt{A_1D^2 - A_1D_1^2} = \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{19}}{4}.$$

Следовательно, $S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2}(DE + A_1B_1) \cdot DD_1$, или

$$S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \cdot \frac{\sqrt{19}}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{19}}{4} = \frac{3\sqrt{19}}{16}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{19}}{16}$.

323. Сечение, проходящее через точки F , C и D_1 , представляет собой равнобедренную трапецию (доказать самостоятельно).



$$S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} (FC + E_1D_1) \cdot E_1M, \text{ где } FC = 2AB = 2; E_1D_1 = 1.$$

Высоту трапеции E_1M найдем из $\triangle E_1FM$;

$$FM = \frac{1}{2} (FC - E_1D_1) = \frac{1}{2}.$$

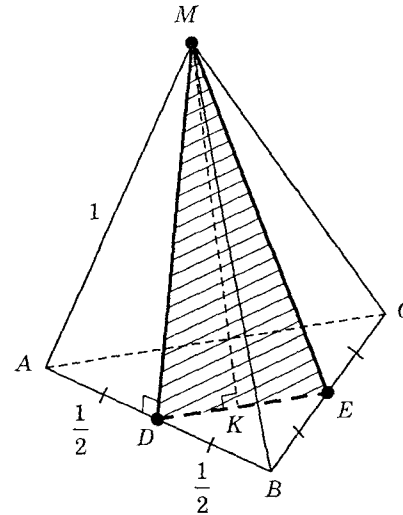
Из $\triangle FEE_1$, где $FE = 1$, $EE_1 = 1$, $FE_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$,

тогда $E_1M = \sqrt{E_1F^2 - MF^2} = \sqrt{2 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$, следовательно,

$$S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} \cdot (2+1) \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{3\sqrt{7}}{4}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{7}}{4}$.

327. Так как по условию тетраэдр единичный, а точки D и E соответственно середины ребер AB и BC , то сечение MDE — равнобедренный треугольник, тогда $S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} DE \cdot MK$, где $DE = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2}$ — средняя линия $\triangle ABC$, MK — высота сечения.

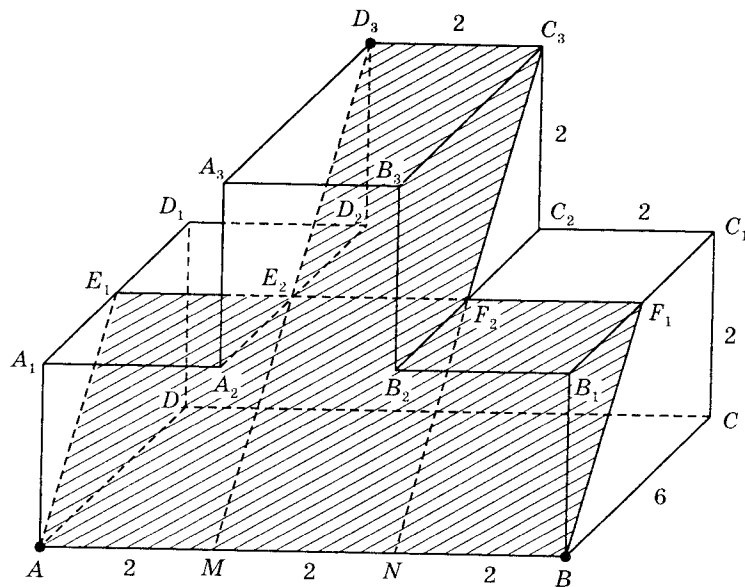


$$\text{Из } \triangle MDK \text{ } MK = \sqrt{MD^2 - DK^2},$$

$$DK = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{4}, MD = \sqrt{AM^2 - AD^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}; MK = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{11}}{4}.$$

$$\text{Тогда } S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{11}}{4} = \frac{\sqrt{11}}{16}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{11}}{16}$.



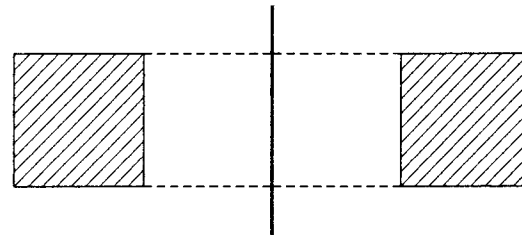
Из $\triangle AA_1E_1$, где $AA_1 \perp A_1E_1$, $AA_1 = 2$, $A_1E_1 = \frac{1}{2}A_1D_1 = \frac{1}{2}AD = 3$, найдем $AE_1 = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$,

значит, $S_{AE_1E_2M} = 2\sqrt{13}$, $S = 4 \cdot 2\sqrt{13} = 8\sqrt{13}$.

Ответ: $8\sqrt{13}$.

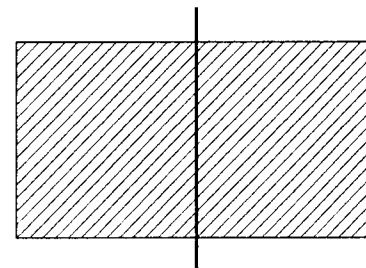
§ 8. Площади поверхностей вращения плоских фигур

346. Рассмотрим осевое сечение тела вращения. Так как квадрат единичный, то $a = H = 1$, тогда $S = 2\pi R(R + H) = 2\pi \cdot 2 \cdot (2 + 1) = 12\pi$.



Ответ: 12π .

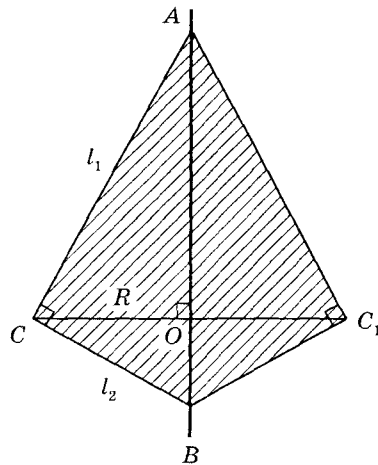
348. При вращении прямоугольника $ABCD$ вокруг прямой, проходящей через середины AB и CD , образуется цилиндр, у которого $R = 1$ и высота $H = 1$, тогда $S_{\text{полн.}} = 2\pi R(R + H) = 2\pi \cdot 1 \cdot (1 + 1) = 4\pi$.



Ответ: 4π .

354. Рассмотрим осевое сечение тела вращения, полученного вращением прямоугольного $\triangle ABC$ вокруг прямой, содержащей гипотенузу AB . При вращении образуются два конуса с общим основанием.

Тогда $S = \pi R l_1 + \pi R l_2 = \pi R(l_1 + l_2)$, где $l_1 = 2$, $l_2 = 1$.



Из $\triangle ABC$ $AB = \sqrt{l_1^2 + l_2^2} = \sqrt{5}$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot OC = \frac{1}{2} l_1 \cdot l_2, \text{ откуда } OC = R = \frac{l_1 \cdot l_2}{AB},$$

или $R = \frac{2 \cdot 1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, тогда $S = \pi \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot (2 + 1) = \frac{6\pi}{\sqrt{5}}$.

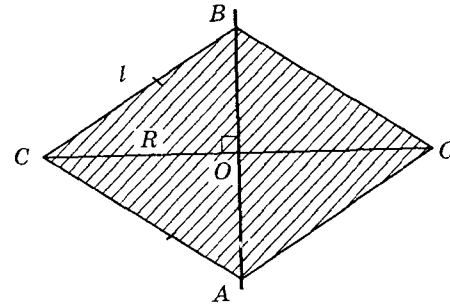
Ответ: $\frac{6\pi}{\sqrt{5}}$.

362. При вращении равностороннего треугольника вокруг прямой AB образуются два равных конуса CBC_1 и CAC_1 с общим основанием.

Тогда $S = 2S_{CBC_1} = 2 \cdot \pi Rl$, где $l = 1$, $BO = \frac{1}{2}$,

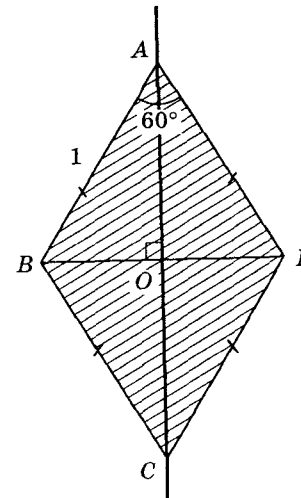
$$R = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Значит, $S = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \sqrt{3}\pi$.



Ответ: $\sqrt{3}\pi$.

365. При вращении ромба $ABCD$ со сторонами, равными 1, образуются два равных конуса с общим основанием.



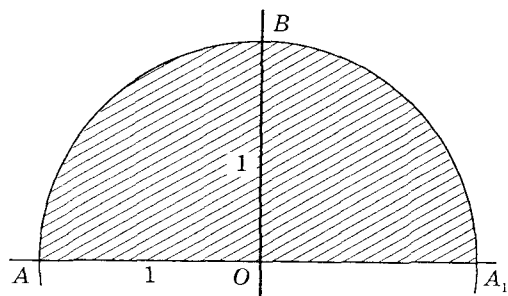
Тогда $S = 2S_{BAD} = 2\pi Rl$, где $l = AB = 1$, $R = BO = \frac{1}{2}$

($\triangle ABD$ — равносторонний, так как $\angle A = 60^\circ$ и $\angle ABD = \angle ADC = 60^\circ$).

Значит, $S = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \pi$.

Ответ: π .

369. При вращении четверти круга радиуса 1 вокруг прямой OB образуется полушар. Площадь поверхности полушара будет равна $S = \frac{1}{2} \cdot 4\pi R^2 + \pi R^2 = 3\pi R^2$. Так как $R = 1$, то $S = 3\pi$.



Ответ: 3π .

370 (см. рис. к № 404).

При вращении правильного шестиугольника со стороной, равной 1, вокруг оси, проходящей через его вершину C перпендикулярно радиусу, проведенному в эту вершину, получим два равных усеченных конуса с общим основанием и два «пустых» конуса.

Следовательно, $S = 2(\pi l(R + r) - \pi r_1 l) = 2\pi l(R + r - r_1)$, где $l = EF = 1$; $R = EC = 2$;

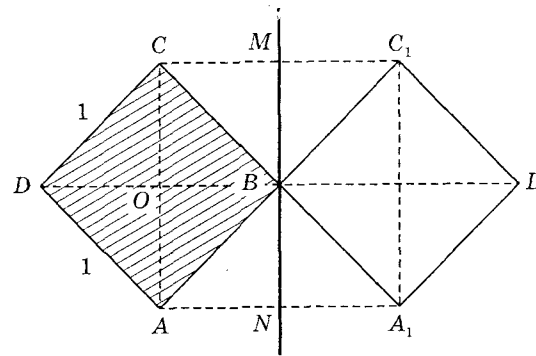
$r = EM = \frac{3}{2}$; $r_1 = DM = \frac{1}{2}$, тогда

$$S = 2\pi \cdot 1 \cdot \left(2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) = 2\pi \cdot 3 = 6\pi.$$

Ответ: 6π .

§ 9. Объемы тел вращения плоских фигур

372. Заметим, что $\triangle DOC = \triangle CMB$ и $\triangle AOD = \triangle ABN$. Равные треугольники имеют равные площади, следовательно, квадрат $ABCD$ можно заменить прямоуголь-



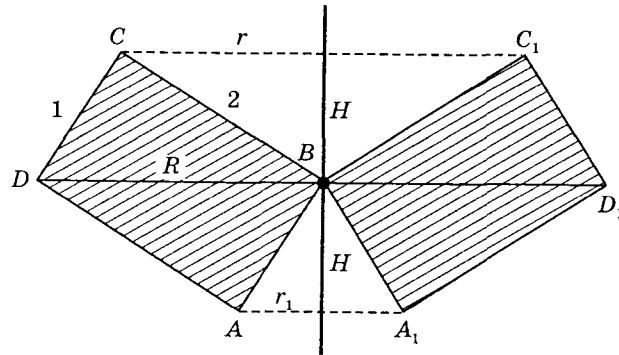
ником $ACMN$. Тогда при вращении прямоугольника $ACMN$ получим цилиндр с осевым сечением ACC_1A_1 .

Значит, $V_{\text{т.в.}} = \pi R^2 H$, где $R = OB = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $H = 2R = \frac{2}{\sqrt{2}}$.

$$V_{\text{т.в.}} = \pi \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

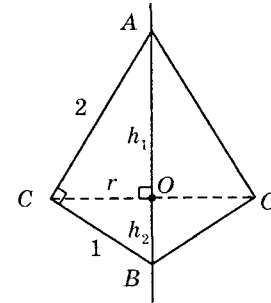
377. При вращении прямоугольника $ABCD$ вокруг прямой, перпендикулярной диагонали BD , проведенной через точку B , получим два усеченных конуса с общим основанием и два «пустых» конуса с основаниями CC_1 и AA_1 . Введем обозначения, показанные на рисунке.



Высоту H найдем из соотношения: $\frac{1}{2} CD \cdot CB =$
 $= \frac{1}{2} BD \cdot H$, или $1 \cdot 2 = R \cdot H$.
 Но $R = \sqrt{CD^2 + BC^2} = \sqrt{5}$, тогда $H = \frac{2}{\sqrt{5}}$;
 $r = \sqrt{2^2 - H^2} = \sqrt{4 - \frac{4}{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$; $r_1 = \sqrt{1 - H^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
 Следовательно, искомый объем будет равен:
 $V_{\text{т.в.}} = V_{CDB} - V_{CBC_1} + V_{ADB} - V_{ABA_1} = \frac{\pi H}{3} (R^2 + r^2 + Rr) -$
 $- \frac{1}{3} \pi r^2 H + \frac{\pi H}{3} (R^2 + r_1^2 + Rr_1) - \frac{1}{3} \pi r_1^2 H = \frac{\pi H}{3} (2R^2 +$
 $+ r^2 + r_1^2 + R \cdot r + R \cdot r_1 - r^2 - r_1^2) = \frac{\pi H R}{3} \cdot (2R + r + r_1).$
 Подставляя числовые значения, находим
 $V_{\text{т.в.}} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} \cdot \left(2\sqrt{5} + \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = \frac{2\pi}{3} \cdot (2\sqrt{5} + \sqrt{5}) =$
 $= \frac{2\pi}{3} \cdot 3\sqrt{5} = 2\pi\sqrt{5}.$

Ответ: $2\pi\sqrt{5}$.

382. При вращении прямоугольного $\triangle ABC$ вокруг прямой AB получим два конуса ACC_1 и BCC_1 с общим основанием CC_1 .



Тогда $V_{\text{т.в.}} = V_{ACC_1} + V_{BCC_1}$.
 Пусть h_1 и h_2 — высоты конусов, $CO = r$ — радиус основания.
 По условию задачи $AC = 2$, $BC = 1$, тогда $AB = \sqrt{5}$.
 Следовательно, $V_{\text{т.в.}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h_1 + \frac{1}{3} \pi r^2 h_2 = \frac{1}{3} \pi r^2 (h_1 + h_2) =$
 $= \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot AB = \frac{\sqrt{5}}{3} \pi r^2.$

Радиус r основания конусов найдем методом сравнения площади $\triangle ABC$.

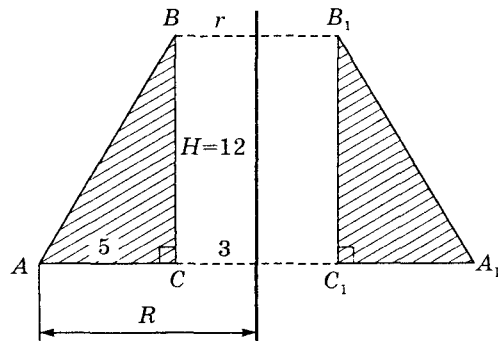
Имеем $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CO = \frac{1}{2} AC \cdot BC$, или

$\sqrt{5} \cdot r = 2 \cdot 1$, откуда $r = \frac{2}{\sqrt{5}}$, тогда

$V_{\text{т.в.}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \pi \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 = \frac{4\sqrt{5}}{15} \pi.$

Ответ: $\frac{4\sqrt{5}}{15} \pi.$

383. При вращении прямоугольного $\triangle ABC$ вокруг внешней оси, параллельной большему катету и отстоящему от него на 3, получим усеченный конус и «пустой» цилиндр.



Тогда $V_{\text{т.в.}} = V_{\text{ус.к.}} - V_{\text{цил.}}$, или

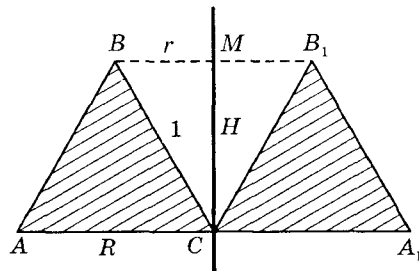
$$V_{\text{т.в.}} = \frac{\pi H}{3} (R^2 + r^2 + Rr) - \pi r^2 H =$$

$$= \frac{\pi H}{3} (R^2 - 2r^2 + Rr), \text{ где } H = 12, R = 5 + 3 = 8, r = 3.$$

Следовательно, $V_{\text{т.в.}} = 4\pi \cdot (64 - 18 + 24) = 280\pi$.

Ответ: 280π .

391. Рассмотрим осевое сечение тела вращения. Оно состоит из усеченного конуса ABB_1A_1 и конуса $СВВ_1$.



Пусть $BM = r, AC = R, MC = H$, тогда $V_{\text{т.в.}} = V_{\text{ус.к.}} - V_{\text{к.}} =$

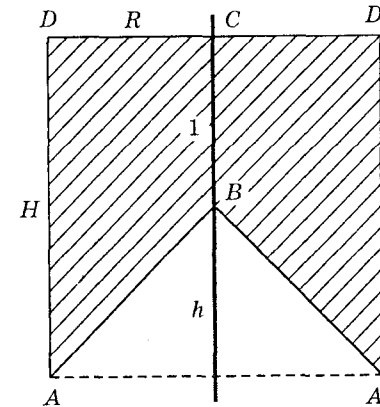
$$\frac{\pi H}{3} (R^2 + r^2 + Rr) - \frac{1}{3} \pi r^2 H = \frac{\pi H}{3} (R^2 + r^2 + Rr - r^2) =$$

$$= \frac{\pi HR}{3} (R + r), \text{ или } V_{\text{т.в.}} = \frac{\pi \cdot \sqrt{3} / 2 \cdot 1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi \sqrt{3}}{2 \cdot 3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{\pi \sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $\frac{\pi \sqrt{3}}{4}$.

398. $DC = R = 1, AD = H = 2, h = 1, R$ и H соответственно радиус и высота цилиндра, h — высота конуса.

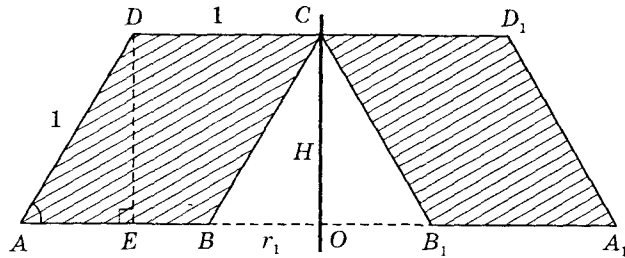


Следовательно, $V_{\text{т.в.}} = V_{\text{цил.}} - V_{\text{кон.}} = \pi R^2 H - \frac{1}{3} \pi R^2 h =$

$$= \frac{1}{3} \pi R^2 (3H - h), \text{ или } V_{\text{т.в.}} = \frac{1}{3} \pi \cdot 1 \cdot 5 = \frac{5\pi}{3}.$$

Ответ: $\frac{5\pi}{3}$.

402. При вращении ромба со сторонами, равными 1, и острым углом 60° вокруг оси, проведенной через вершину C , перпендикулярно стороне DC , образуются усеченный конус ADD_1A_1 и конус BCB_1 .



Пусть в усеченном конусе $R = AO = 1 + r_1$, $r = DC = 1$, $CO = DE = H$, а в конусе BCB_1 $BO = r_1$, тогда объем тела вращения будет равен:

$$V_{\text{т.в.}} = V_{\text{ус.к.}} - V_{\text{к.}} = \frac{\pi H}{3} (R^2 + r^2 + Rr) - \frac{1}{3} \pi r_1^2 H =$$

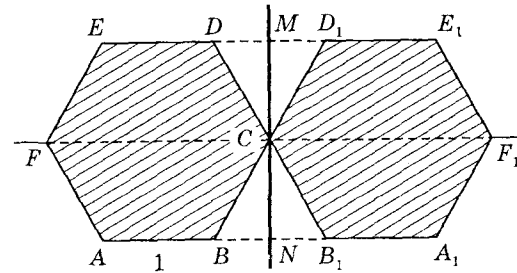
$$= \frac{\pi H}{3} ((1 + r_1)^2 + 1 + (1 + r_1) \cdot 1 - r_1^2) = \pi H (1 + r_1).$$

Заметим, что в $\triangle ADE$ $\angle ADE = 30^\circ$, тогда $AE = BO = \frac{1}{2}$, $DE = CO = H = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Значит, } V_{\text{т.в.}} = \pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}\pi}{4}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{3\sqrt{3}\pi}{4}.$$

404. Рассмотрим осевое сечение тела вращения. Проведем прямую FF_1 . При вращении правильного шестиугольника со стороной, равной 1, вокруг оси, проходящей через его вершину C перпендикулярно радиусу, проведенному в эту вершину, получим два



равных усеченных конуса с общим основанием и два «пустых» конуса. Следовательно, объем тела вращения будет равен: $V_{\text{т.в.}} = 2(V_{\text{ус.к.}} - V_{\text{к.}})$.

Пусть $FC = R$, $EM = r$, $DM = r_1$, $MN = H$,

$$MC = \frac{1}{2}H, \text{ тогда}$$

$$V_{\text{т.в.}} = 2 \left(\frac{\pi H}{3} (R^2 + Rr + r^2) - \frac{1}{3} \pi r_1^2 \cdot \frac{1}{2} H \right) =$$

$$= \frac{2\pi H}{3} (R^2 + Rr + r^2 - \frac{1}{2} r_1^2).$$

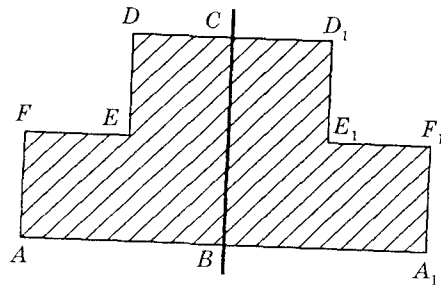
$$\text{Но } R = FC = 2, r = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, r_1 = \frac{1}{2}, H = MN = BD =$$

$$= \sqrt{3}, \text{ значит, } V_{\text{т.в.}} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} \left(4 + 3 + \frac{9}{4} - \frac{1}{8} \right) =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} \cdot \frac{73}{8} = \frac{73\sqrt{3}\pi}{12}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{73\sqrt{3}\pi}{12}.$$

406. При вращении многоугольника $ABCDEF$, составленного из трех единичных квадратов, образуются два цилиндра с радиусами оснований соответственно 2 и 1 и высотой 1.



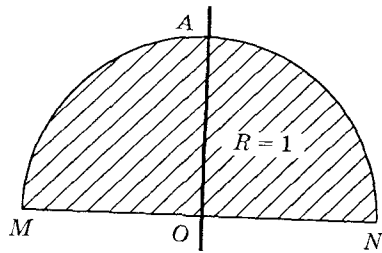
Пусть $AB = R = 2$; $DC = r = 1$, $H = 1$, тогда

$$V_{\text{т.в.}} = V_1 + V_2 = \pi R^2 H + \pi r^2 H = \pi H(R^2 + r^2), \text{ или}$$

$$V_{\text{т.в.}} = \pi \cdot 1 \cdot (2^2 + 1^2) = 5\pi.$$

Ответ: 5π .

408. При вращении полукруга радиуса 1 вокруг прямой $OA \perp MN$ образуется полушар, ограниченный снизу кругом.



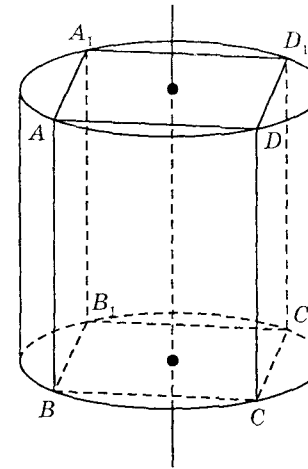
$$\begin{aligned} \text{Тогда } V_{\text{т.в.}} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 + \pi R^2 = \frac{2}{3} \pi R^3 + \pi R^2 = \\ &= \frac{2}{3} \pi + \pi = \frac{5\pi}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{5\pi}{3}$.

§ 10. Объемы тел вращения многогранников

411. Повернем куб так, как показано на рисунке. При вращении единичного куба вокруг прямой, проходящей через центры граней ADD_1A_1 и BCC_1B_1 , получим цилиндр радиуса $R = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и высотой $H = 1$,

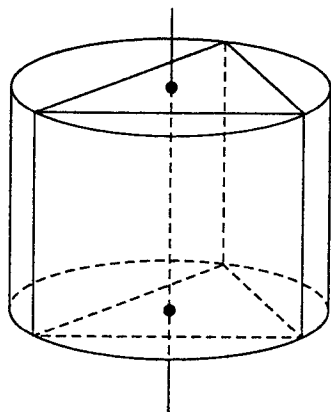
$$\text{тогда } V_{\text{т.в.}} = V_{\text{цил.}} = \pi R^2 H = \frac{\pi}{2}.$$



Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

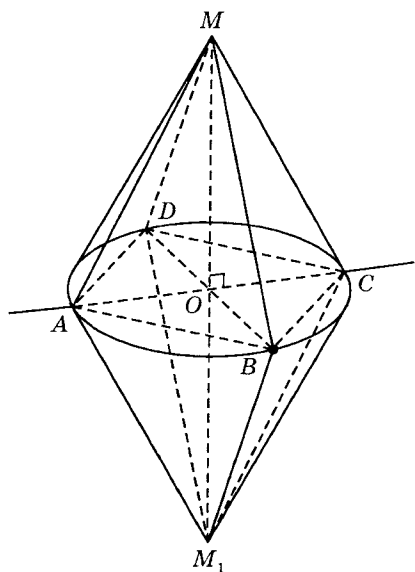
413. При вращении правильной призмы, все ребра которой равны 1, вокруг прямой, проходящей через центры оснований, получим цилиндр, у которого высота $H = 1$, радиус основания $R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, тогда

$$V_{\text{т.в.}} = V_{\text{цил.}} = \pi R^2 H = \pi \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{\pi}{3}.$$



Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

415. При вращении правильной четырехугольной пирамиды $MABCD$, все ребра которой равны 1, вокруг прямой AC , образуются два равных конуса радиуса $OC = R$ и высоты $MO = H$.



$$\text{Тогда } V_{\text{т.в.}} = 2V_{\text{кон.}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{2}{3} \pi R^2 H,$$

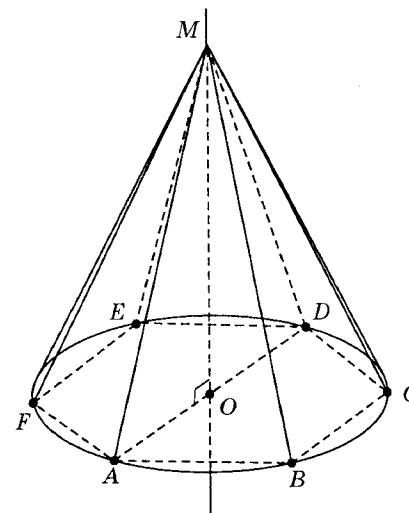
$$\text{где } R = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Высоту } H \text{ найдем из прямоугольного } \triangle AOM, \text{ где } AM = 1, \text{ тогда } H = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Следовательно, } V_{\text{т.в.}} = \frac{2}{3} \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{6}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$.

416. При вращении правильного шестиугольника $MABCDEF$ вокруг прямой, содержащей высоту MO , получим конус, у которого радиус основания $AO = R$, а высота $MO = H$. Тогда $V_{\text{т.в.}} = V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H$.

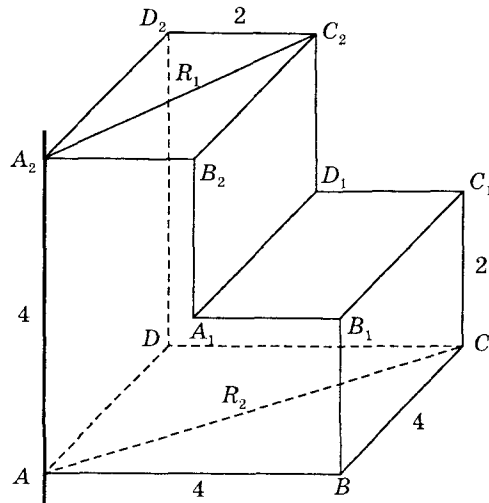


По условию $AB = 1$ — сторона основания, $AM = 2$ — длина бокового ребра. Известно, что в правильном шестиугольнике $AB = a = R = AO = 1$; из $\triangle AOM$ найдем $MO = H = \sqrt{AM^2 - AO^2}$, или $H = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$, тогда

$$V_{\text{т.в.}} = \frac{1}{3} \pi \cdot 1^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$.

418. Тело, полученное вращением многогранника вокруг прямой AA_2 , состоит из двух цилиндров, у которых радиусы оснований равны R_1 и R_2 , а высоты равны $A_1B_2 = CC_1 = H = 2$.



Тогда $V_{\text{т.в.}} = V_1 + V_2 = \pi R_1^2 H + \pi R_2^2 H = \pi H(R_1^2 + R_2^2)$.

Из $\triangle A_2B_2C_2$, где $A_2B_2 = 2$, $B_2C_2 = BC = 4$, имеем

$$R_1 = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

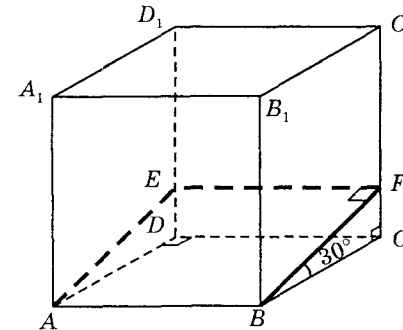
Аналогично из $\triangle ABC$ $R_2 = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$.

Значит, $V_{\text{т.в.}} = \pi \cdot 2 \cdot (20 + 32) = 104\pi$.

Ответ: 104π .

§ 11. Многогранники

428. По условию задачи ребро куба $A...C_1$ равно $7\sqrt[4]{3}$.



Искомое сечение, проведенное под углом 30° к плоскости основания, представляет прямоугольник $ABFE$, где $AB = 7\sqrt[4]{3}$. Сторону BF найдем из прямоугольного треугольника BCF .

$$BF = \frac{BC}{\cos 30^\circ} = \frac{2 \cdot 7\sqrt[4]{3}}{\sqrt{3}} = \frac{14\sqrt[4]{3}}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно,

$$S_{\text{сеч.}} = AB \cdot BF = 7\sqrt[4]{3} \cdot \frac{14\sqrt[4]{3}}{\sqrt{3}} = \frac{7 \cdot 14 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 98.$$

Ответ: 98.

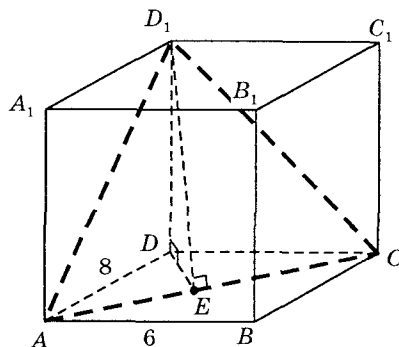
431. Пусть a — ребро куба, b — сторона шестиугольника, тогда $b = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

По условию площадь шестиугольника равна $S = 1$.
С другой стороны, $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}b^2$, значит, $\frac{3\sqrt{3}}{2}b^2 = 1$, или $\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2}{2} = 1$, $3\sqrt{3}a^2 = 4$, $a^2 = \frac{4}{3\sqrt{3}}$.

Следовательно, $S_{\text{полн.}} = 6a^2 = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

443. $\angle D_1ED$ — искомый угол между плоскостями ABC и D_1AC .



Высоту DE $\triangle ADC$ найдем методом сравнения площадей.

$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} AC \cdot DE = \frac{1}{2} AD \cdot DC,$$

где $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 10$, $AD = 8$, $DC = 6$,

тогда $DE = \frac{AD \cdot DC}{AC} = \frac{8 \cdot 6}{10} = \frac{24}{5}$.

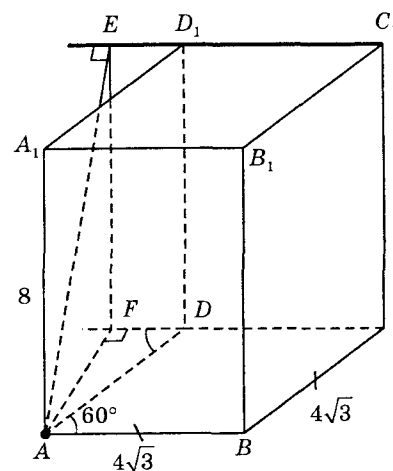
Из прямоугольного $\triangle DD_1E$ имеем $\operatorname{tg} \angle DED_1 = \frac{DD_1}{DE}$,

или $\operatorname{tg} \angle DED_1 = \frac{18 \cdot 5}{24} = \frac{3 \cdot 5}{4} = \frac{15}{4}$,

откуда $\angle DED_1 = \operatorname{arctg} \frac{15}{4}$.

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{15}{4}$.

446. Из точки A опустим перпендикуляр AE на продолжение C_1D_1 и соединим точки E и F , где $EF \parallel D_1D$ и $EF = D_1D = A_1A = 8$.



Поскольку $D_1D \perp (ADC)$, то $EF \perp (ACD)$, значит, AF — проекция AE на плоскость основания.

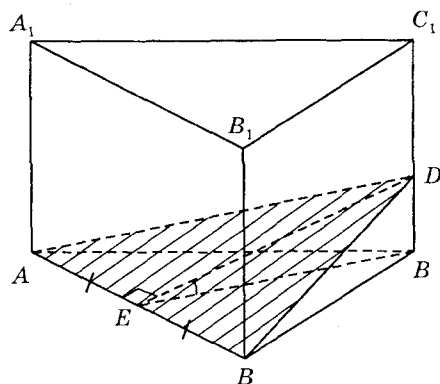
Так как $D_1C_1 \parallel DC$, то $AE \perp CD$, следовательно, $AF \perp CD$ (согласно теореме о трех перпендикулярах).

Из $\triangle ADF$, где $\angle ADF = \angle BAD = 60^\circ$,
 $AF = 4\sqrt{3} \sin 60^\circ = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}/2 = 6$;

из $\triangle AEF$ $AE = \sqrt{AF^2 + FE^2}$, или $AE = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

Ответ: 10.

452. Пусть ADB — секущая плоскость; проведем $CE \perp AB$, тогда $DE \perp AB$, $\angle DEC = 30^\circ$. Пусть $AB = a$ — сторона основания.



В $\triangle CEB$ $BE = \frac{1}{2}a$, $BC = a$, тогда $CE = \frac{\sqrt{3}}{2}a$,

$$CD = \frac{\sqrt{3}}{2}a \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2}.$$

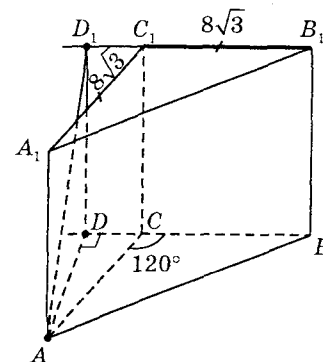
По условию объем пирамиды $DABC$ равен 1, или $\frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{2} = 1$, или $a^3 = 8\sqrt{3}$, $a = 2\sqrt[3]{\sqrt{3}}$.

$$\text{Но } S_{\text{сеч.}} = \frac{S_{ABC}}{\cos \alpha} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

Так как $a = 2\sqrt[3]{\sqrt{3}}$, то $a^2 = 4\sqrt[3]{3}$, тогда $S_{\text{сеч.}} = 2\sqrt[3]{3}$.

Ответ: $2\sqrt[3]{3}$.

459. Расстоянием от точки A до прямой BC есть длина перпендикуляра AD , опущенного из точки A на продолжение прямой BC , тогда AD_1 — расстояние от точки A до прямой B_1C_1 .



Так как $\angle ACB = 120^\circ$, то $\angle ACD = 60^\circ$, тогда из $\triangle ADC$ $AD = AC \sin 60^\circ = 8\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12$.

Искомое расстояние AD_1 найдем из прямоугольного $\triangle ADD_1$, где $DD_1 = CC_1 = AA_1 = 5$, тогда

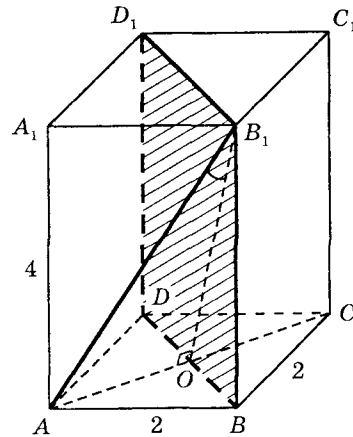
$$AD = \sqrt{AD^2 + DD_1^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13.$$

Ответ: 13.

467. Проведем диагонали AC и BD основания. Пусть O — точка пересечения. Заметим, что AO — перпендикуляр, опущенный из точки A на плоскость BDD_1 . Тогда $\angle AB_1O$ есть угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1 .

$$\text{В прямоугольном } \triangle AB_1O \text{ } AO = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

$AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2}$, или $AB_1 = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$, тогда



$$\sin \angle AB_1O = \frac{AO}{AB_1} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{10}, \text{ откуда}$$

$$\angle AB_1O = \arcsin \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

468. Пусть $AB = x$, $AD_1 = CD_1 = y$.

По условию задачи объем $V = 1$, или $S_{\text{осн.}} \cdot H = 1$, где $S_{\text{осн.}} = AB^2 = x^2$.

$$\text{Из } \triangle ADD_1 \text{ имеем } y^2 = x^2 + H^2, \quad (1)$$

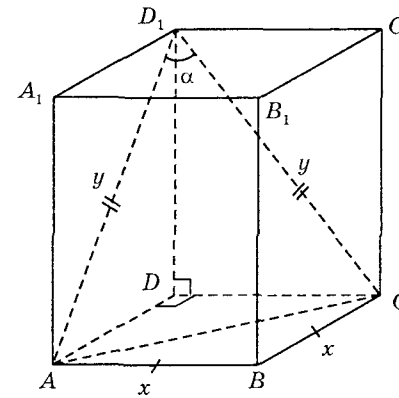
$$\text{где } H = DD_1, \text{ тогда } x^2 H = 1. \quad (2)$$

$$\text{Из } \triangle ADC \text{ } AC^2 = 2x^2.$$

Наконец, из $\triangle AD_1C$ по теореме косинусов получим

$$AC^2 = AD_1^2 + CD_1^2 - 2AD_1 \cdot CD_1 \cdot \cos \alpha, \text{ где } \cos \alpha = \frac{1}{3} \text{ (по}$$

условию задачи).



$$\text{Значит, } 2x^2 = y^2 + y^2 - 2y^2 \cdot \frac{1}{3}, \text{ или } 2x^2 = \frac{4}{3}y^2,$$

$$x^2 = \frac{2}{3}y^2, \text{ откуда } y^2 = \frac{3}{2}x^2.$$

$$\text{Учитывая (1), имеем } \frac{3}{2}x^2 = x^2 + H^2, \text{ или}$$

$$\frac{1}{2}x^2 = H^2. \quad (3)$$

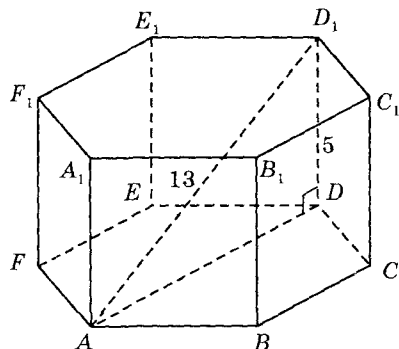
$$\text{Из соотношения (2) находим } H = \frac{1}{x^2}, \text{ тогда (3) при-}$$

$$\text{мет вид } \frac{1}{2}x^2 = \left(\frac{1}{x^2}\right)^2, \text{ или } x^6 = 2, \text{ откуда } x = \sqrt[6]{2}.$$

$$\text{Итак, сторона основания призмы } AB = \sqrt[6]{2}.$$

$$\text{Ответ: } \sqrt[6]{2}.$$

475. $S_{\text{бок.}} = P \cdot H$, где P — периметр основания, H — высота призмы $DD_1 = H = 13$.



Поскольку AD — большая диагональ основания, то AD_1 — большая диагональ призмы.

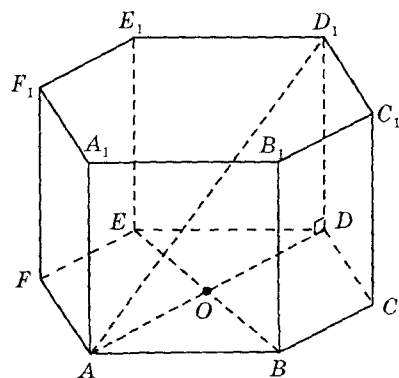
По условию $DD_1 = 5$, $AD_1 = 13$.

Так как призма правильная, то в основании — правильный шестиугольник, где $BC = a_6 = R$, тогда $AD = 2R = 2a_6$. Из $\triangle ADD_1$ находим $AD = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, тогда $BC = 6$, $P = 6 \cdot 6 = 36$.

Значит, $S_{\text{бок.}} = 36 \cdot 5 = 180$.

Ответ: 180.

476. Пусть $AB = AA_1 = a$, тогда $AD = 2a$, так как в правильном шестиугольнике $a = R = AO$, $AD = 2R = 2a$.



Из $\triangle AD_1D$, где $AD_1 = 1$, имеем

$$AD^2 + D_1D^2 = 1, \text{ или } 4a^2 + a^2 = 1, a = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

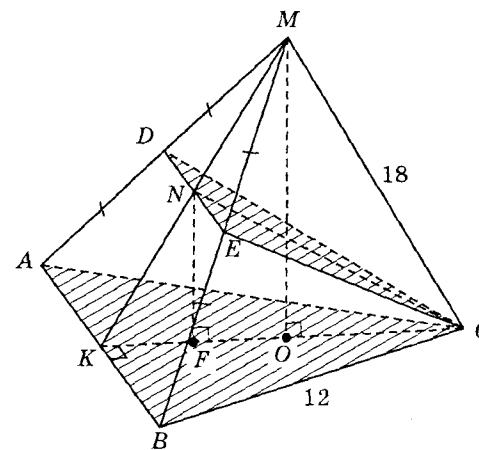
$$S_{\text{осн.}} = 6 \cdot S_{\triangle AOB} = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}.$$

Следовательно, объем $V = S_{\text{осн.}} \cdot H$, или

$$V = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} \cdot a = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{(\sqrt{5})^3} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 5\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{15}}{50}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{15}}{50}$.

488. Из точки C проведем перпендикуляр CN к DE . Из точки N опустим перпендикуляр NF на плоскость основания. CK — медиана, биссектриса и высота $\triangle ABC$. $NF \perp DE$ и $CN \perp DE$, значит, $\angle NCF$ — линейный угол между плоскостями CDE и ABC .



$$\text{В } \triangle ABC \text{ } BC = OC \cdot \sqrt{3}, OC = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}.$$

$$\text{Из } \triangle МОС \text{ } MO = \sqrt{18^2 - (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{324 - 48} = \\ = \sqrt{276} = 2\sqrt{69}.$$

$$NF = \frac{1}{2} MO = \sqrt{69} \text{ — средняя линия } \triangle КОМ.$$

$$\text{Из } \triangle СКВ, \text{ где } BC = 12, BK = 6, KC = \sqrt{144 - 36} = \\ = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}. \text{ Так как } CO = 2 \cdot OK \text{ и } OF = FK, \text{ то}$$

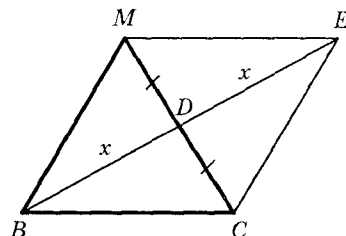
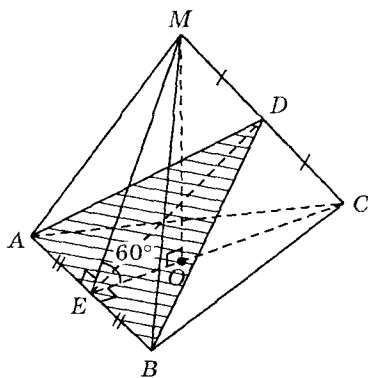
$$FC = \frac{5}{6} KC = 5\sqrt{3}.$$

$$\text{Следовательно, } \operatorname{tg} \angle NCF = \frac{NF}{FC} = \frac{\sqrt{69}}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{23}}{5},$$

$$\text{откуда } \angle NCF = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{23}}{5}.$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{23}}{5}.$$

498. Согласно условию $MO = 1$, $\angle MEO = 60^\circ$ — угол между боковой гранью AMB и плоскостью основания ABC .



$$\text{Из } \triangle МОЕ \text{ } OE = MO \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}. \text{ Но } OE = r \text{ — ра-}$$

диус окружности, вписанной в правильный $\triangle ABC$,

$$ME = \frac{MO}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{По условию задачи } D \text{ — середина } MC, \text{ тогда } MD = \\ = DC = \frac{1}{2} MC.$$

$$\text{Из } \triangle МЕВ \text{ } MB = \sqrt{ME^2 + BE^2} = \frac{\sqrt{21}}{3}.$$

$$\text{Значит, } MB = MC = \frac{\sqrt{21}}{3}.$$

Достроим $\triangle MBC$ до параллелограмма $BMEC$. Пусть $BD = DE = x$, тогда по свойству параллелограмма имеем $BE^2 + MC^2 = 2 \cdot (BC^2 + BM^2)$, или

$$4x^2 + \frac{21}{9} = 2 \cdot \left(4 + \frac{21}{9}\right), \text{ или } 4x^2 = \frac{93}{9}, \text{ откуда } x^2 = \frac{93}{36}.$$

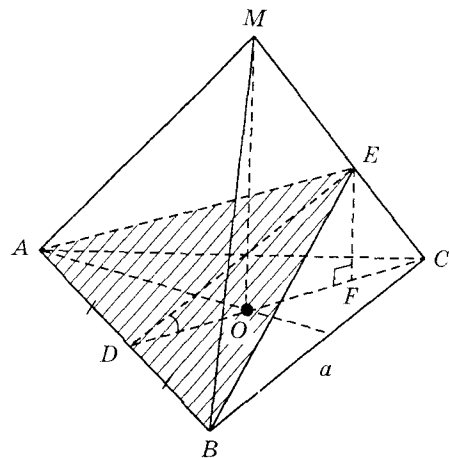
Так как пирамида правильная и точка D — середина MC , то $BD = AD$, т. е. сечение ABD — равнобедренный треугольник, тогда DE — высота и медиана $\triangle ADB$.

$$\text{Из } \triangle BED \text{ } DE = \sqrt{BD^2 - BE^2} = \sqrt{\frac{93}{36} - 1} = \frac{\sqrt{57}}{6}.$$

$$\text{Следовательно, } S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} AB \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{57}}{6} = \frac{\sqrt{57}}{6}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{57}}{6}.$$

501. Пусть $AB = a$ — ребро правильного тетраэдра, тогда из $\triangle CDB$, где $BC = a$, $BD = \frac{a}{2}$, $CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Проведем высоту MO тетраэдра.

Проведем $EF \perp$ пл. ABC , $BC = OC\sqrt{3}$, откуда

$$OC = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Из } \triangle МОС \text{ } MO = \sqrt{MC^2 - OC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Согласно условию задачи $V_{EABC} = \frac{2}{5} V_{MABC}$, тогда

$$EF = \frac{2}{5} MO = \frac{2}{5} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{2a\sqrt{6}}{15}.$$

Так как $\triangle EFC \sim \triangle МОС$ (как прямоугольные, имеющие общий острый угол C), то $\frac{EF}{MO} = \frac{FC}{OC}$, или $\frac{FC}{OC} = \frac{2}{5}$,

$$\text{откуда } FC = \frac{2}{5} OC = \frac{2}{5} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{5\sqrt{3}};$$

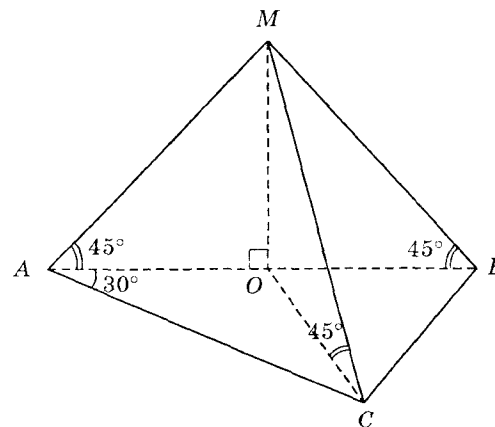
$$DF = DC - FC = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{2a}{5\sqrt{3}} = \frac{11a}{10\sqrt{3}}.$$

Искомый угол между плоскостями найдем из $\angle DEF$: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{EF}{DF}$, где $\alpha = \angle EDF$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2a\sqrt{6}}{15} : \frac{11a}{10\sqrt{3}} =$

$$= \frac{2a\sqrt{6} \cdot 10\sqrt{3}}{15 \cdot 11a} = \frac{4\sqrt{2}}{11}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{4\sqrt{2}}{11}.$$

509. Так как $\triangle ABC$ — прямоугольный, то точка O — середина гипотенузы AB .



По условию $\angle CAB = 30^\circ$, $AB = 1$, тогда $AC = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot MO$, где MO — высота пирамиды.

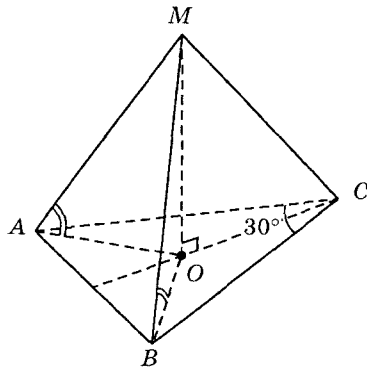
$$S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Так как $\angle MAO = 45^\circ$, то $AO = MO = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2}$.

$$\text{Следовательно, } V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{48}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{48}$.

510. Согласно условию задачи $\triangle ABC$ — равнобедренный ($AC = BC$), $\angle ACB = 30^\circ$.



Пусть $\angle MAO = \angle MBO = \angle MCO = \alpha$ — угол между боковым ребром и плоскостью основания.

Обозначим $AC = BC = x$.

Так как $S_{\triangle ABC} = 3$, то получим

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin 30^\circ, \text{ или } \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{2} = 3, \text{ откуда}$$

$$x = 2\sqrt{3}.$$

По теореме синусов $\frac{AB}{\sin 30^\circ} = 2R$, где $R = AO = OB$,

тогда $AB = R$, т. е. $\triangle AOB$ — правильный.

Сторону AB найдем из $\triangle ABC$ по теореме косинусов:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos 30^\circ, \text{ или}$$

$$AB^2 = 2x^2 - \sqrt{3}x^2 = x^2(2 - \sqrt{3}).$$

Так как $x = 2\sqrt{3}$, то $AB = 2\sqrt{3(2 - \sqrt{3})}$.

$$\text{Но } 2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2}(4 - 2\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)^2, \text{ значит,}$$

$$AB = 2\sqrt{3 \cdot \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)^2} = (\sqrt{3} - 1)\sqrt{6}.$$

$$\text{Итак, } AB = AO = (\sqrt{3} - 1)\sqrt{6}.$$

По условию задачи объем пирамиды $V = 1$, или

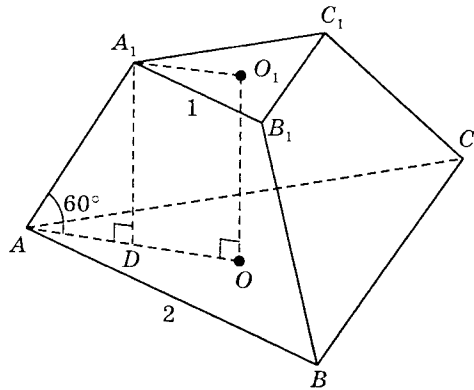
$$\frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot MO = 1, \text{ где } S_{\text{осн.}} = 3, \text{ тогда } MO = 1.$$

$$\text{Из } \triangle AMO \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{MO}{AO} = \frac{1}{(\sqrt{3} - 1)\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}(\sqrt{3} + 1).$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{6}}{12}(\sqrt{3} + 1).$$

513. Так как пирамида $ABCA_1B_1C_1$ — правильная, то $AO = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$; $A_1O_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Из вершины A_1 опустим перпендикуляр A_1D на основание ABC .



$$\text{Тогда } AD = AO - OD = AO - A_1O_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

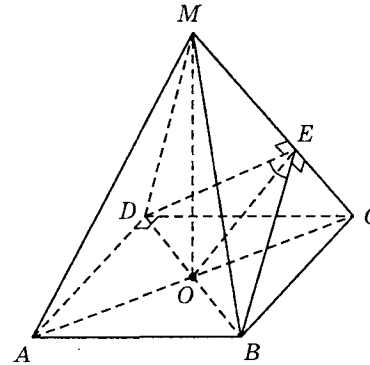
$$\text{Из } \triangle ADA_1 \text{ } A_1D = AD \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 1, \text{ тогда}$$

$$V = \frac{H}{3} (S_{\text{н}} + S_{\text{в}} + \sqrt{S_{\text{н}} \cdot S_{\text{в}}}) = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{7\sqrt{3}}{12}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{7\sqrt{3}}{12}.$$

529. $\angle DEB = 120^\circ$ — двугранный угол при боковом ребре MC , где $DE \perp MC$ и $BE \perp MC$.



Так как пирамида $MABCD$ — правильная, то $DE = EB$, т. е. $\triangle DEB$ — равнобедренный, тогда EO — медиана, биссектриса и высота.

Так как $\angle DEB = 120^\circ$, то $\angle EBD = 30^\circ$, значит, в $\triangle BOE$ $OE = \frac{1}{2} BE$, $BE = 2 \cdot OE$.

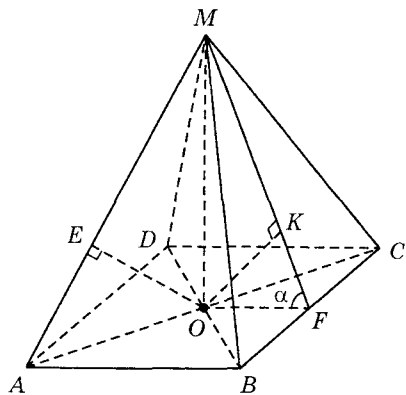
$$\begin{aligned} \text{По условию задачи } S_{\text{бок.}} &= 4, \text{ или } S_{\text{AMC}} = 2S_{\triangle MOC} = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} MC \cdot OE = MC \cdot OE, \text{ тогда } S_{\text{бок.}} = 4S_{\triangle MCB} = \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} MC \cdot BE = 2MC \cdot BE = 4. \end{aligned}$$

Так как $BE = 2 \cdot OE$, то $S_{\text{бок.}} = 2MC \cdot 2 \cdot OE = 4 \cdot (MC \cdot OE) = 4$, откуда $MC \cdot OE = 1$.

Значит, $S_{\text{сеч.}} = S_{\text{AMC}} = 1$.

Ответ: 1.

530. Пусть в правильной пирамиде $MABCD$ $OE = \sqrt{3}$, $OK = \sqrt{2}$, где OE — расстояние от центра основания до бокового ребра AM и OK — расстояние от точки O до боковой грани MBC . $\angle MFO = \alpha$ — двугранный



угол при основании пирамиды. Заметим, что $\angle MFO = \angle MOK = \alpha$, $\angle MAO = \angle MOE = \beta$.

Из $\triangle MKO$ и $\triangle OKF$ соответственно имеем:

$$MO = \frac{\sqrt{2}}{\cos \alpha}; \quad OK = \frac{\sqrt{2}}{\sin \alpha}.$$

Из $\triangle MEO$ и $\triangle AOE$ соответственно находим:

$$MO = \frac{\sqrt{3}}{\cos \beta}; \quad AO = \frac{\sqrt{3}}{\sin \beta}.$$

$$\text{Значит, } \frac{\sqrt{2}}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{\cos \beta} \text{ и } \frac{\sqrt{2}}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} \sin \beta}.$$

$$\text{Следовательно, } \cos \alpha = \frac{\sqrt{2} \cos \beta}{\sqrt{3}},$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \sin \beta}{\sqrt{3}} = \frac{2 \sin \beta}{\sqrt{3}}.$$

Но $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, тогда

$$\frac{(\sqrt{2})^2 \cos^2 \beta}{(\sqrt{3})^2} + \frac{2 \cdot (\sqrt{2})^2 \sin^2 \beta}{(\sqrt{3})^2} = 1, \text{ или}$$

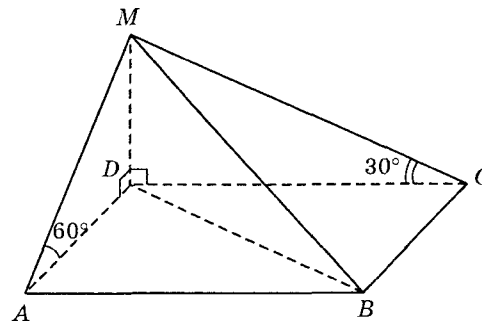
$$\frac{2 \cos^2 \beta}{3} + \frac{4 \sin^2 \beta}{3} = 1,$$

$$2 \cos^2 \beta + 4(1 - \cos^2 \beta) = 3, \quad 2 \cos^2 \beta = 1, \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Тогда } \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ откуда } \alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

532. Пусть боковые грани MDC и ADM перпендикулярны плоскости $ABCD$. В этом случае MD — высота пирамиды. По условию задачи $ABCD$ — прямоугольник, тогда $MC \perp CB$ и $MA \perp AB$, $\angle MCD = 30^\circ$, $\angle MAD = 60^\circ$.



Пусть $AD = x$, $DC = y$, тогда из $\triangle ADM$ $MD = x \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}x$, а из $\triangle MDC$ $MD = y \operatorname{tg} 30^\circ = y/\sqrt{3}$.

Сравнивая правые части полученных равенств, получим $\sqrt{3}x = y/\sqrt{3}$, откуда $y = 3x$.

Так как объем пирамиды $V = 9$, то $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H$,

где $S_{\text{осн.}} = AD \cdot DC = xy$, $H = MD$, или $\frac{1}{3} xy \cdot H = 9$, $xy \cdot H =$

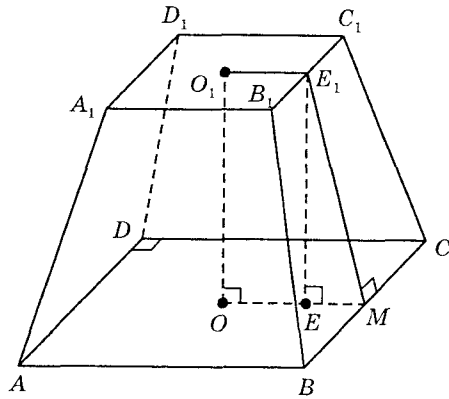
$$= 27, \quad y = 3x, \quad H = \sqrt{3}x, \text{ тогда } x \cdot 3x \cdot \sqrt{3}x = 27, \text{ или}$$

$$x^3 = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} = (\sqrt{3})^3, \text{ откуда } x = \sqrt{3}, y = 3\sqrt{3}.$$

$$\text{Значит, } S_{\text{осн.}} = xy = \sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 9.$$

Ответ: 9.

541. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде $AB = 2$, $A_1B_1 = 1$, $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} S_{\text{полн.}}$.



Но $S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{н}} + S_{\text{в}}$, где $S_{\text{н}}$ — площадь нижнего основания, $S_{\text{в}}$ — верхнего. $S_{\text{н}} = AB^2 = 4$, $S_{\text{в}} = A_1B_1^2 = 1$.

$$\text{Значит, } S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} (S_{\text{бок}} + 5), \text{ или } 2S_{\text{бок}} = S_{\text{бок}} + 5,$$

$$\text{откуда } S_{\text{бок}} = 5.$$

$$\text{Но } S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} (P_{\text{н}} + P_{\text{в}}) \cdot h, \text{ где } P_{\text{н}} = 4AB = 8;$$

$$P_{\text{в}} = 4A_1B_1 = 4, h = ME_1 \text{ — апофема (высота боковой грани). Получим } \frac{1}{2} (8 + 4) \cdot h = 5, 6h = 5, h = \frac{5}{6}.$$

Проведем $E_1E \perp OM$.

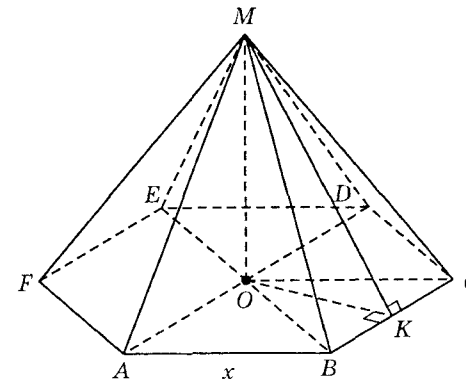
$$\begin{aligned} \text{Из } \triangle E_1EM, \text{ где } EM = OM - EO = OM - O_1E_1 = \\ = \frac{1}{2} (AB - A_1B_1) = \frac{1}{2}, \text{ найдем } EE_1 = \sqrt{E_1M^2 - EM^2} = \\ = \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{36}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } V_{\text{ус.пир.}} = \frac{H}{3} (S_{\text{н}} + S_{\text{в}} + \sqrt{S_{\text{н}} \cdot S_{\text{в}}}) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} (4 + 1 + \sqrt{4 \cdot 1}) = \frac{14}{9}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{14}{9}.$$

547. Пусть $AB = x$ — сторона основания. Так как в основании пирамиды правильный шестиугольник, то $x = R = OC$, где R — радиус описанной окружности.



$$\text{В } \triangle OKC \text{ } KC = \frac{1}{2} x, \text{ тогда } OK = \sqrt{x^2 - \frac{1}{4} x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} x.$$

$$\text{По условию } S_{\text{бок}} = 10 \cdot S_{\text{осн.}}$$

Но $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P \cdot h$, где $P = 6AB = 6x$, $h = MK$ — апофема боковой грани.

$$S_{\text{осн}} = 6 \cdot \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} x^2,$$

тогда $\frac{1}{2} \cdot 6x \cdot h = 10 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} x^2$, $x > 0$, $3h = 15\sqrt{3}x$,

откуда $h = MK = 5\sqrt{3}x$.

$$\begin{aligned} \text{Из } \triangle MOK \quad MO = H = \sqrt{MK^2 - OK^2} &= \sqrt{75x^2 - \frac{3}{4}x^2} = \\ &= \frac{\sqrt{297}}{2} x = \frac{3\sqrt{33}}{2} x. \end{aligned}$$

По условию задачи объем $V = \frac{9\sqrt{11}}{4}$, или $\frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H =$
 $= \frac{9\sqrt{11}}{4}$, или $\frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} x^2 \cdot \frac{3\sqrt{33}}{2} x = \frac{9\sqrt{11}}{4}$, или $x^3 = 1$,

откуда $x = 1$.

Ответ: 1.

555. По свойству диагонали прямоугольного параллелепипеда имеем: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, где $d = B_1D_2$, $a = B_1C_1 = A_2D_2 = 1$, $b = AB = 6$, $c = C_2D_2 = 2$, тогда $d^2 = 1^2 + 6^2 + 2^2 = 41$.

Ответ: 41.

§ 12. Фигуры вращения

568. Так как цилиндр и конус имеют общее основание и высоту, то $V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H$. По условию задачи

$$V_{\text{цил.}} = 150, \text{ или } \pi R^2 H = 150, \text{ тогда } V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3} \cdot 150 = 50.$$

Ответ: 50.

575. Пусть R — радиус основания конуса, H — высота. По условию, образующая $l = 4\sqrt[3]{9/\pi}$, $V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H$. Зная угол между образующей конуса и плоскостью основания, имеем:

$$H = l \cdot \sin 30^\circ = 4\sqrt[3]{9/\pi} \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt[3]{9/\pi};$$

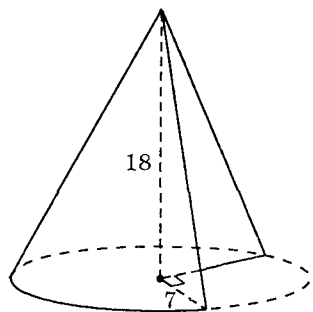
$$R = l \cdot \cos 30^\circ = 4\sqrt[3]{9/\pi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9/\pi}.$$

$$\begin{aligned} \text{Значит, } V_{\text{кон.}} &= \frac{1}{3} \pi \cdot (2\sqrt{3})^2 \cdot (\sqrt[3]{9/\pi})^2 \cdot 2\sqrt[3]{9/\pi} = \\ &= \frac{1}{3} \pi \cdot 12 \cdot 2 \cdot \frac{9}{\pi} = 72. \end{aligned}$$

Ответ: 72.

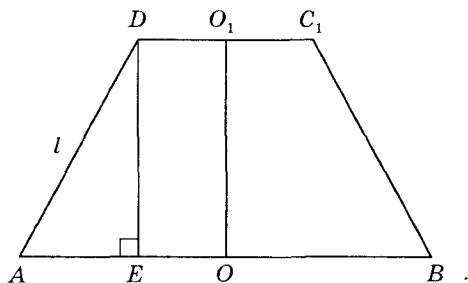
585. Как видно из рисунка, $V = \frac{3}{4} V_{\text{кон.}}$, где $H = 18$, $R = 7$.

Так как $V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H$, то $V = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{1}{4} \pi R^2 H$,
 тогда $\frac{V}{\pi} = \frac{1}{4} R^2 H = \frac{1}{4} \cdot 7^2 \cdot 18 = \frac{9}{2} \cdot 49 = 220,5$.



Ответ: 220,5.

591. Рассмотрим осевое сечение усеченного конуса — равнобедренную трапецию $ABCD$, где $AO = R$, $DO_1 = r$, $OO_1 = DE = H$, соответственно радиусы верхнего и нижнего оснований и высота. По условию задачи $r : R : l = 1 : 4 : 5$, где l — образующая усеченного конуса.



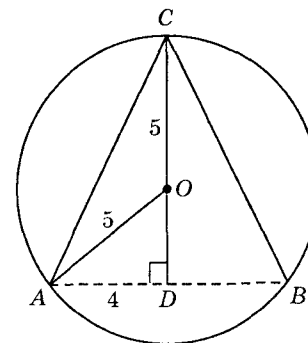
Пусть $r = x$, тогда $R = 4x$, $l = 5x$. Так как $DE = 8$, то из $\triangle ADE$ $(5x)^2 - (4x - x)^2 = 8^2$, или $16x^2 = 64$; $x = 2$.

Значит, $r = 2$, $R = 8$, $l = 10$, следовательно,

$$S_{\text{бок.}} = \pi l(R + r) = \pi \cdot 10 \cdot (8 + 2) = 100\pi.$$

Ответ: 100π .

596. Рассмотрим осевое сечение шара и вписанного в него конуса. Пусть $R = 5$ — радиус шара, $r = 4$ — ра-



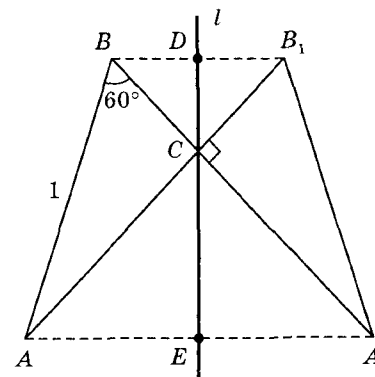
диус основания конуса. Пусть $CD = H$ — высота конуса. Заметим, что $AO = CO = 5$ — как радиусы шара. Из $\triangle AOD$ $OD = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

Значит, $CD = CO + OD = 8$.

Ответ: 8.

601. Рассмотрим осевое сечение тела вращения.

Из $\triangle ABC$ $BC = AB \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$; $AC = AB \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



По условию l — биссектриса прямого угла BCB_1 , значит, $BD = DC = x = \frac{BC}{\sqrt{2}} = \frac{AB \cdot \cos 60^\circ}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot 1/2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$;

$$AE = CE = y = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{AB \cdot \sin 60^\circ}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1 \cdot \sqrt{3}/2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Следовательно,

$$V_{\text{т.в.}} = V_{\text{ус.к.}} - V_{BCB_1} - V_{ACA_1} = \frac{1}{3} \pi (x+y)(x^2 + xy + y^2) -$$

$$- \left(\frac{\pi}{3} x^3 + \frac{\pi}{3} y^3 \right) = \frac{1}{3} \pi (x+y)(x^2 + xy + y^2) -$$

$$- \frac{\pi}{3} (x+y)(x^2 - xy + y^2) = \frac{2\pi}{3} xy(x+y) =$$

$$= \frac{\pi \cdot 1^3}{6} \sin 120^\circ \cdot \sin 105^\circ.$$

Но $\sin 120^\circ = \sin (90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$

$$\sin 105^\circ = \sin (60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ +$$

$$+ \cos 60^\circ \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1).$$

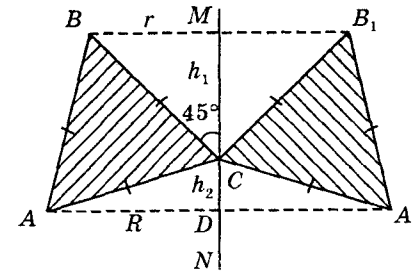
Значит, $V_{\text{т.в.}} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1) = \frac{\pi\sqrt{6}}{48} (\sqrt{3} + 1).$

Ответ: $\frac{\pi\sqrt{6}}{48} (\sqrt{3} + 1).$

607. Пусть MN — ось вращения. Рассмотрим осевое сечение тела вращения.

Как видно из рисунка, объем тела вращения равен объему усеченного конуса с образующей AB без объемов двух конусов с образующими BC и AC .

Обозначим $BM = r$, $AD = R$, $MC = h_1$, $CD = h_2$.



По условию задачи $AB = BC = AC = 1$, $\angle BCM = 45^\circ$, тогда $\angle MBC = 45^\circ$, т. е. $h_1 = r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (из $\triangle BMC$).

Следовательно, $V_{\text{т.в.}} = V_{\text{ус.к.}} - (V_{BCB_1} + V_{ACA_1}) = \frac{\pi}{3} (h_1 +$

$$+ h_2)(R^2 + r^2 + Rr) - \left(\frac{1}{3} \pi r^2 h_1 + \frac{1}{3} \pi R^2 h_2 \right) = \frac{\pi}{3} (h_1 R^2 +$$

$$+ h_1 r^2 + h_1 Rr + h_2 R^2 + h_2 r^2 + h_2 Rr - r^2 h_1 - R^2 h_2) =$$

$$= \frac{\pi}{3} (h_1 R(R+r) + h_2 r(R+r)) = \frac{\pi}{3} (R+r)(h_1 R + h_2 r).$$

Из $\triangle ACD$ $\angle ACD = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$, тогда $CD = AC \cdot \cos 75^\circ = \cos 75^\circ$. Но $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (доказать самостоятельно).

Аналогично $AD = R = AC \sin 75^\circ = \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},$

значит,

$$V_{\text{т.в.}} = \frac{\pi}{3} \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}+3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{3\pi(1+\sqrt{3})}{12\sqrt{2}} = \frac{\pi(1+\sqrt{3})}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}(\sqrt{3}+1).$$

Ответ: $\frac{\pi\sqrt{2}}{8}(\sqrt{3}+1).$

609. Пусть $a = 2\sqrt{7/\pi}$ и $b = 2\sqrt{1/7\pi}$ соответственно длина и ширина прямоугольника. При вращении его вокруг прямой, проходящей через середины больших сторон, получим цилиндрическую поверхность.

Тогда $S_{\text{полн.}} = 2\pi R(R + H)$, где $R = \frac{1}{2}a = \sqrt{7/\pi}$,

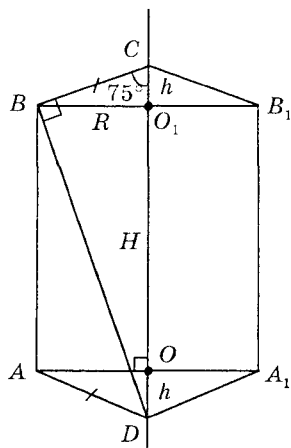
$H = b = 2\sqrt{1/7\pi}$, значит,

$$S_{\text{полн.}} = 2\pi \cdot \sqrt{7/\pi}(\sqrt{7/\pi} + 2\sqrt{1/7\pi}) = 2\pi \cdot \frac{7}{\pi} + 4\pi \cdot \frac{1}{\pi} =$$

$$= 14 + 4 = 18.$$

Ответ: 18.

616. Согласно условию задачи в трапеции $ABCD$ AB и CD — основания, $CD = 1$, $AD = BC$, $\angle BCD = 75^\circ$, $\angle CBD = 90^\circ$.



При вращении равнобедренной трапеции вокруг ее большего основания CD получим цилиндр и два равных конуса.

Пусть $H = OO_1$ — высота цилиндра, $R = BO_1$ — радиус цилиндра (и конуса), $h = CO_1$ — высота конуса, тогда

$$\begin{aligned} V_{\text{т.в.}} &= V_{\text{цил.}} + 2V_{\text{кон.}} = \pi R^2 H + 2 \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 h = \\ &= \frac{\pi}{3} R^2 (3H + 2h). \end{aligned} \quad (1)$$

Так как $H + 2h = CD = 1$, то (1) примет вид

$$\begin{aligned} V_{\text{т.в.}} &= \frac{\pi}{3} R^2 (H + 2h + 2H) = \frac{\pi}{3} R^2 (CD + 2H) = \\ &= \frac{\pi}{3} R^2 (1 + 2H). \end{aligned}$$

$$\text{Итак, } V_{\text{т.в.}} = \frac{\pi}{3} R^2 (1 + 2H). \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Из } \triangle BCD \quad BC &= CD \cdot \cos 75^\circ = 1 \cdot \cos 75^\circ = \cos 75^\circ; \\ \text{из } \triangle BO_1C \quad R &= BO_1 = BC \cdot \sin 75^\circ = \cos 75^\circ \cdot \sin 75^\circ = \\ &= \frac{1}{2} (2 \cos 75^\circ \cdot \sin 75^\circ) = \frac{1}{2} \sin 150^\circ = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \sin (180^\circ - 30^\circ) = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{Наконец, } h &= CO_1 = BC \cdot \cos 75^\circ = \cos 75^\circ \cdot \cos 75^\circ = \\ &= \cos^2 75^\circ = \frac{1}{2} (1 + \cos 150^\circ) = \frac{1}{2} (1 + \cos (180^\circ - 30^\circ)) = \end{aligned}$$

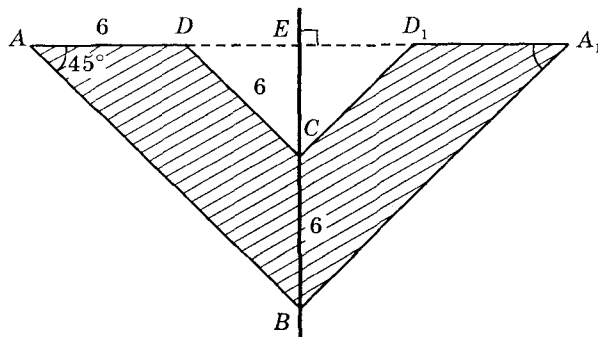
$$= \frac{1}{2} (1 - \cos 30^\circ) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{4} (2 - \sqrt{3}).$$

$$\text{Тогда } H = OO_1 = CD - 2h = 1 - \frac{1}{2} (2 - \sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Следовательно, } V_{\text{т.в.}} = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \\ = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{16} \cdot (\sqrt{3} + 1) = \frac{\pi}{48} (\sqrt{3} + 1).$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{48} (\sqrt{3} + 1).$$

617. Рассмотрим осевое сечение тела вращения, полученного вращением равнобедренной трапеции $ABCD$ с острым углом 45° вокруг боковой стороны BC , длина которой равна DC . Так как $\angle A = 45^\circ$, то $\angle CDE = 45^\circ$, тогда $DE = CE = r$.



По условию $AD = DC = CB = 6$.

Тогда $V_{\text{т.в.}} = V_{ABA_1} - V_{DCD_1}$; в $\triangle DEC$ $DE = CE = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$.

$$V_{ABA_1} = \frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{1}{3} \pi (AD + DE)^2 \cdot BE = \\ = \frac{1}{3} \pi (6 + 3\sqrt{2})^2 \cdot (6 + 3\sqrt{2}) = \frac{1}{3} \pi \cdot 9(2 + \sqrt{2})^2 \cdot 3(2 + \sqrt{2}) = \\ = 9\pi (2 + \sqrt{2})^3 = 9\pi (8 + 12\sqrt{2} + 12 + 2\sqrt{2}) =$$

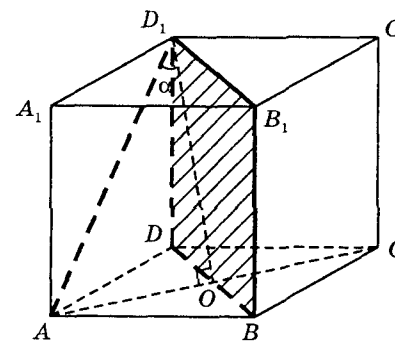
$$= 9\pi (20 + 14\sqrt{2}) = 18\pi (10 + 7\sqrt{2});$$

$$V_{DCD_1} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot DE^2 \cdot CE = \frac{1}{3} \pi (DE)^3 = \\ = \frac{1}{3} \pi (3\sqrt{2})^3 = \frac{1}{3} \pi \cdot 27 \cdot 2\sqrt{2} = 18\sqrt{2}\pi.$$

$$\text{Значит, } V_{\text{т.в.}} = 18\pi (10 + 7\sqrt{2}) - 18\sqrt{2}\pi = \\ = 18\pi (10 + 7\sqrt{2} - \sqrt{2}) = 18\pi \cdot (10 + 6\sqrt{2}) = 36\pi (5 + 3\sqrt{2}).$$

$$\text{Ответ: } 36\pi (5 + 3\sqrt{2}).$$

670. Заметим, что диагональ $AC \perp$ плоскости DBB_1 , где O — проекция точки A на эту плоскость.



Пусть a — ребро куба.

Из $\triangle AOD_1$ $\sin \alpha = \frac{AO}{AD_1}$, где $\alpha = \angle AD_1O$ — искомый

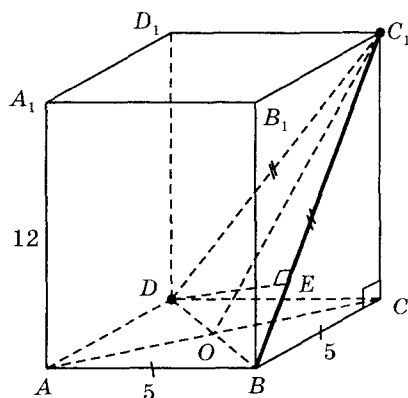
угол, $AO = R = \frac{a}{\sqrt{2}}$ — радиус окружности, описанной около квадрата $ABCD$.

Из $\triangle ADD_1$, где $AD = DD_1 = a$, имеем $AD_1 = a\sqrt{2}$.

Следовательно, $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{2}} : a\sqrt{2} = \frac{1}{2}$, т. е. $\alpha = 30^\circ$.

Ответ: 30° .

671. Поскольку $ABCD$ — квадрат, то $BC_1 = DC_1$ — как наклонные, имеющие равные проекции соответственно BC и DC .



Тогда высота $DE \triangle BDC_1$ и будет искомым расстоянием от точки D до прямой C_1B .

Из прямоугольного $\triangle BCC_1$, где $BC = 5$, $CC_1 = AA_1 = 12$, имеем $BC_1 = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.

Значит, $BC_1 = DC_1 = 13$.

Из $\triangle BCD$ $BD = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$.

Проведем высоту C_1O в $\triangle C_1BD$, тогда

$$S_{\triangle C_1BD} = \frac{1}{2} BD \cdot C_1O.$$

С другой стороны, $S_{\triangle C_1BD} = \frac{1}{2} BC_1 \cdot DE$.

Следовательно, $BD \cdot C_1O = BC_1 \cdot DE$.

Длину C_1O найдем из $\triangle C_1OC$, где $CC_1 = 12$,

(1)

$$OC = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}, \text{ тогда}$$

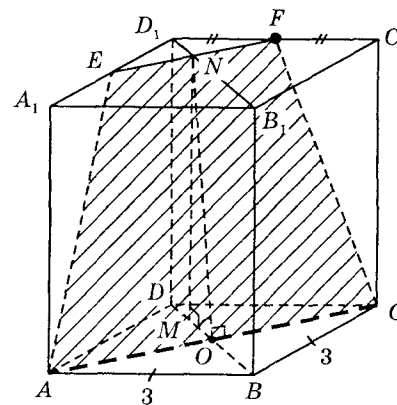
$$OC_1 = \sqrt{OC^2 + CC_1^2} = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 12^2} = \sqrt{\frac{620}{4}} = \sqrt{155}.$$

Учитывая соотношение (1), находим

$$DE = \frac{BD \cdot C_1O}{BC_1} = \frac{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{155}}{13} = \frac{5\sqrt{310}}{13}.$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{310}}{13}$.

672. Плоскость, проходящая через диагональ AC основания и середину ребра C_1D_1 , представляет собой равнобедренную трапецию $AEFC$.



Так как F — середина C_1D_1 , то E — середина EF , тогда $EF = \frac{1}{2} A_1C_1 = \frac{1}{2} AC$.

Тогда $\angle NOM$ — угол между плоскостью $AEFC$ и плоскостью основания $ABCD$.

Середина N отрезка EF проектируется в середину M отрезка OD , тогда $ON \perp AC$ (по теореме о трех перпендикулярах).

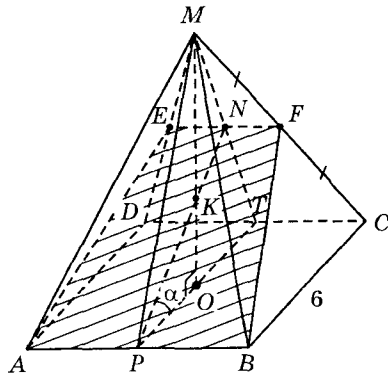
Так как $AB = 3$, то $OD = R = \frac{3}{\sqrt{2}}$, $OM = \frac{1}{2} OD = \frac{3}{2\sqrt{2}}$,

тогда из $\triangle NOM$

$$\operatorname{tg} \angle MON = \frac{MN}{OM} = \frac{DD_1}{OM} = \frac{3\sqrt{2}}{3/2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4.$$

Ответ: 4.

673. Поскольку BF — медиана боковой грани MBC , то $MF = FC$. Плоскость ABF пересечет грань MDC по отрезку $FE \parallel AB$, где EF — средняя линия $\triangle MDC$. $\angle NPT$ — искомый угол, лежащий в плоскости MPT .



Так как $MP = MT$, то $\triangle MPT$ — равнобедренный, тогда K — точка пересечения медиан MO и PN . По свойству медиан треугольника, имеем

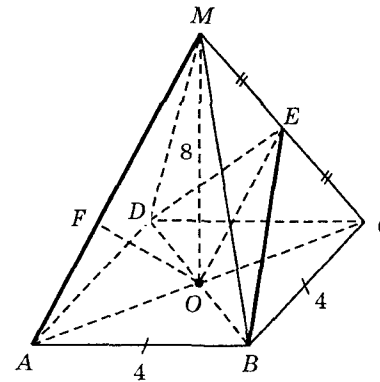
$$OK = \frac{1}{3} MO = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4, \quad OP = \frac{1}{2} PT = \frac{1}{2} BC = 3.$$

Из $\triangle POK$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{OK}{OP} = \frac{4}{3}$, откуда

$$\alpha = \angle NPT = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{4}{3}$.

674. Заметим, что расстояние между скрещивающимися прямыми BE и AM равно расстоянию между прямой AM и плоскостью, проходящей через $BE \parallel AM$, т. е. плоскостью BDE , где OE — средняя линия $\triangle AMC$ (O — середина AC , E — середина MC).



Так как $BD \perp AC$ и $BD \perp MO$, то $BD \perp (AMC)$, т. е. OF — перпендикуляр к плоскости BDE , следовательно, длина OF является искомым расстоянием между медианой BE и ребром AM .

$$AO = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}, \quad MO = 8 \text{ (по условию), тогда из}$$

$$\triangle AOM \quad AM = \sqrt{AO^2 + MO^2} = \sqrt{8 + 64} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

Длину OF найдем, сравнивая площади $\triangle AOM$.

$$S_{\triangle AOM} = \frac{1}{2} AO \cdot OM = \frac{1}{2} AM \cdot OF, \text{ откуда}$$

$$OF = \frac{AO \cdot OM}{AM} = \frac{\frac{4}{\sqrt{2}} \cdot 8}{6\sqrt{2}} = \frac{4 \cdot 8}{6\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{8}{3}.$$

Ответ: $\frac{8}{3}$.

§ 13. Применение метода координат

13.1. Угол между двумя прямыми

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися параллельными им прямыми.

Применяя векторно-координатный способ, надо иметь в виду, что если φ — угол между скрещивающимися прямыми, то $\cos \varphi = |\cos(\vec{a}, \vec{b})|$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — векторы, коллинеарные заданным скрещивающимся прямым.

При решении задач указанным методом будем придерживаться следующего алгоритма:

1. Вводим прямоугольную систему координат.
2. Находим координаты направляющих векторов данных прямых.
3. Находим косинус угла между направляющимися векторами по формуле

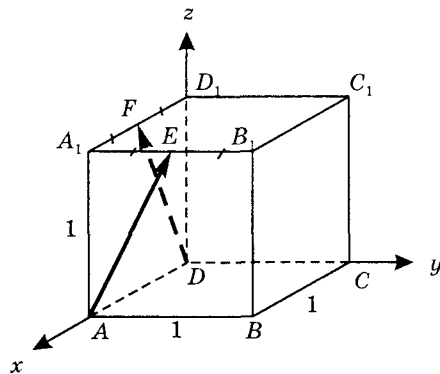
$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

где $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$.

Замечание. За угол между прямыми принимают меньший из двух углов, образованный этими прямыми, значит, косинус угла между прямыми должен быть больше нуля, и он равен модулю косинуса угла между направляющими векторами.

Рассмотрим несколько задач на нахождение угла между прямыми методом координат.

1. В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми DF и AE , где точки F и E — середины ребер соответственно A_1D_1 и A_1B_1 .



Введем прямоугольную систему координат, приняв точку D за начало. Тогда имеем

$$D(0; 0; 0), A(1; 0; 0), E\left(1; \frac{1}{2}; 1\right), F\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right).$$

Теперь запишем координаты векторов $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{DF}$:
 $\overrightarrow{AE}\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), \overrightarrow{DF}\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$. Пусть угол между векторами $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{DF}$ равен α , тогда

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DF}}{|\overrightarrow{AE}| \cdot |\overrightarrow{DF}|}.$$

$$\text{Но } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DF} = 0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1;$$

$$|\overrightarrow{AE}| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

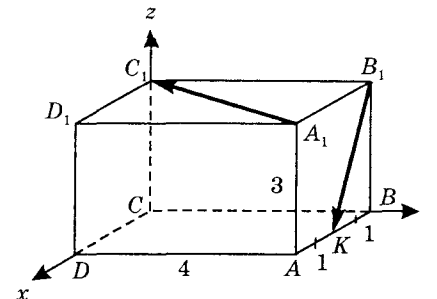
$$|\overrightarrow{DF}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Следовательно, } \cos \alpha = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{4}{5},$$

$$\text{откуда } \alpha = \arccos \frac{4}{5}.$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{4}{5}.$$

2. В прямоугольном параллелепипеде $A...D_1$ $AB = 2$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$, точка K — середина ребра AB . Найдите угол между прямыми A_1C_1 и B_1K .



Введем пространственную систему координат, тогда $A_1(4; 2; 3)$, $C_1(0; 0; 3)$.

Следовательно, $\overrightarrow{A_1C_1} \{-4; -2; 0\}$.

Так как по условию задачи K — середина AB , то $A_1K = KB = 1$.

Значит, $K(4; 1; 0)$, $B(4; 0; 3)$.

Значит, $\overrightarrow{B_1K} \{0; 1; -3\}$.

Пусть искомым углом между прямыми A_1C_1 и B_1K равен α . Учитывая, что $\cos \alpha \geq 0$, получим

$$\cos \alpha = \frac{|\overline{A_1 C_1} \cdot \overline{B_1 K}|}{|\overline{A_1 C_1}| \cdot |\overline{B_1 K}|}.$$

$$\text{Но } \overline{A_1 C_1} \cdot \overline{B_1 K} = -4 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + 0 \cdot (-3) = -2;$$

$$|\overline{A_1 C_1}| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5};$$

$$|\overline{B_1 K}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}.$$

$$\text{Значит, } \cos \alpha = \frac{2}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{5} \cdot 10} = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10},$$

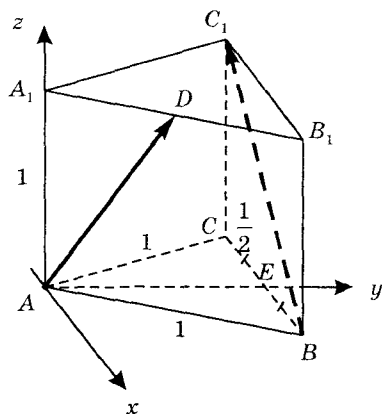
$$\text{откуда } \alpha = \arccos \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

Замечание. Можно показать, что если $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$,

то $\operatorname{tg} \alpha = 7$ (доказать самостоятельно).

3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AD и BC_1 , где D — середина ребра A_1B_1 .



Точку A поместим в начало прямоугольной системы координат так, чтобы ось X была параллельна стороне BC , а ось Y — перпендикулярна ей.

AE — высота и медиана $\triangle ABC$, тогда $CE = BE = \frac{1}{2}$.

Значит, $A(0; 0; 0)$, $A_1(0; 0; 1)$, $B\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$,

$B_1\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$, $C_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$,

где $AE = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Поскольку по условию задачи D — середина A_1B_1 ,

то $x_D = \frac{x_{A_1} + x_{B_1}}{2} = \frac{0 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$; $y_D = \frac{y_{A_1} + y_{B_1}}{2} = \frac{0 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$;

$z_D = \frac{z_{A_1} + z_{B_1}}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1$. Тогда $D\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}; 1\right)$.

Теперь находим координаты векторов $\overline{AD}$ и $\overline{BC_1}$:

$\overline{AD}\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}; 1\right)$, $\overline{BC_1}(-1; 0; 1)$.

Пусть α — искомый угол между прямыми AD и BC_1 , тогда $\cos \alpha = \frac{|\overline{AD} \cdot \overline{BC_1}|}{|\overline{AD}| \cdot |\overline{BC_1}|}$,

где $\overline{AD} \cdot \overline{BC_1} = \frac{1}{4} \cdot (-1) + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 0 + 1 \cdot 1 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$;

$$|\overline{AD}| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

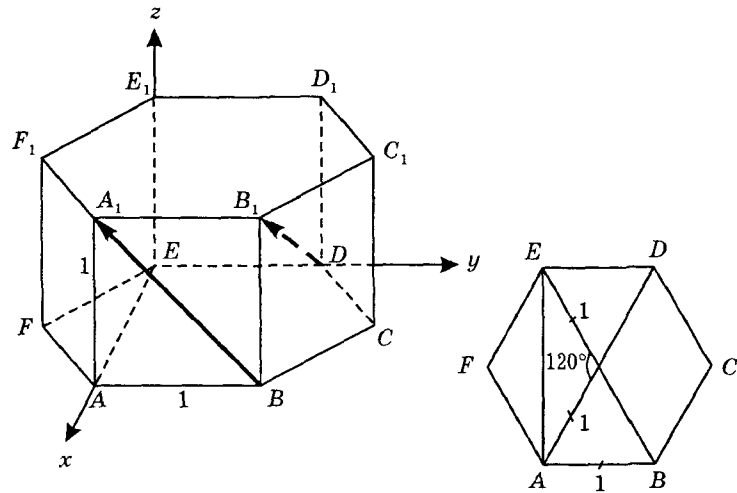
$$|\overline{BC_1}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

$$\text{Следовательно, } \cos \alpha = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{10}},$$

$$\text{откуда } \alpha = \arccos \frac{3}{2\sqrt{10}}.$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{3}{2\sqrt{10}}.$$

4. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми BA_1 и DB_1 .



Введем систему координат.

Длину отрезка AE найдем из $\triangle AOE$ по теореме косинусов, где $\angle AOE = 120^\circ$, $AO = OE = AB = 1$, тогда $AE^2 = OA^2 + OE^2 - 2 \cdot OA \cdot OE \cdot \cos 120^\circ$, или

$$AE^2 = 2(1 - \cos 120^\circ) = 4 \sin^2 60^\circ, \text{ откуда}$$

$$AE = 2 \sin 60^\circ = \sqrt{3}.$$

Теперь найдем координаты точек A_1 и B .

$$A_1(0; \sqrt{3}; 1), B(1; \sqrt{3}; 0).$$

$$\text{Следовательно, } \overline{BA_1}(-1; 0; 1).$$

Аналогично находим координаты вектора $\overline{DB_1}$, где

$$D(1; 0; 0), B_1(1; \sqrt{3}; 1), \text{ тогда } \overline{DB_1}(0; \sqrt{3}; 1).$$

Пусть α — искомый угол между прямыми BA_1 и DB_1 , тогда $\cos \alpha = \frac{\overline{BA_1} \cdot \overline{DB_1}}{|\overline{BA_1}| \cdot |\overline{DB_1}|}$.

$$\text{Но } \overline{BA_1} \cdot \overline{DB_1} = -1 \cdot 0 + 0 \cdot \sqrt{3} + 1 \cdot 1 = 1;$$

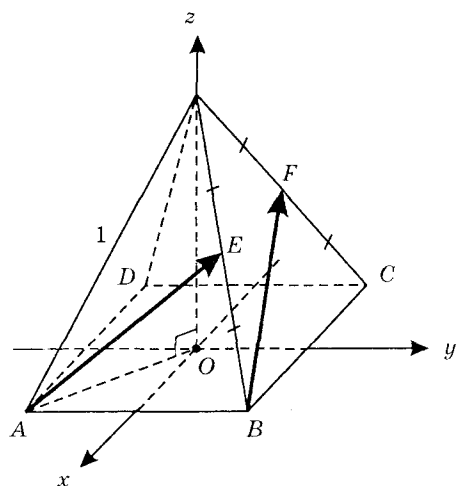
$$|\overline{BA_1}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}; \quad |\overline{DB_1}| = \sqrt{0^2 + (\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2.$$

$$\text{Следовательно, } \cos \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \text{ откуда}$$

$$\alpha = \arccos \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

5. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AE и BF , где точки E и F — середины ребер BM и CM соответственно.



Поместим начало координат в точке O — центре основания пирамиды, а оси X и Y проведем параллельно сторонам основания. Найдем координаты точек A , B и C .

$$A\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right), B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right), C\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right).$$

Для нахождения координат вершины M пирамиды найдем OM из прямоугольного $\triangle AOM$, где $AO = R = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, тогда $MO = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\text{Значит, } M\left(0; 0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Поскольку точки E и F — середины соответственно отрезков MB и MC , то по формулам для нахождения координат середины отрезка имеем $E\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$,

$$F\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

Теперь найдем координаты векторов $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{BF}$:

$$\overrightarrow{AE}\left(-\frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right), \overrightarrow{BF}\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

Пусть α — угол между векторами $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{BF}$, тогда

$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF}|}{|\overrightarrow{AE}| \cdot |\overrightarrow{BF}|}.$$

$$\begin{aligned} \text{Но } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF} &= -\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \\ &= \frac{3}{16} + \frac{3}{16} + \frac{2}{16} = \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AE}| &= \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{9}{16} + \frac{2}{16}} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{BF}| = \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Следовательно, } \cos \alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}, \text{ откуда}$$

$$\alpha = \arccos \frac{2}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{2}{3}.$$

13.2. Угол между прямой и плоскостью

Если прямая a пересекает плоскость α и не перпендикулярна α , то углом между прямой a и плоскостью α называется угол между прямой a и ее проекцией на плоскость α .

Если $a \parallel \alpha$, то угол равен 0° , если $a \perp \alpha$, то угол равен 90° .

При решении задач с помощью метода координат нам будут необходимы следующие теоретические сведения:

1. Уравнение плоскости $ax + by + cz + d = 0$, где a, b, c — координаты вектора нормали к плоскости, т. е. вектора, перпендикулярного плоскости.

2. Косинус угла между векторами $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ определяется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}, \text{ где } \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \text{ — скаляр-}$$

ное произведение векторов, $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$,

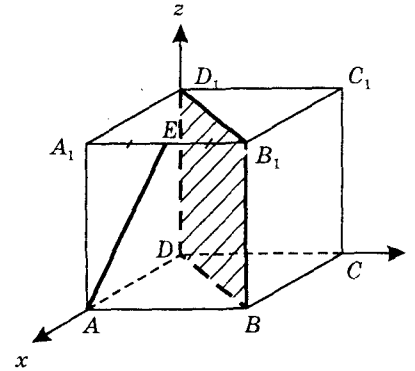
$|\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$ — длины (модули) векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. Ненулевой вектор $\vec{M}(a_1; b_1; c_1)$, лежащий на некоторой прямой p , или параллельный ей, называется направляющим вектором прямой.

4. Синус угла β между прямой, направляющий вектор которой имеет координаты $\vec{M}(a_1; b_1; c_1)$, и плоскостью, которая задается уравнением $ax + by + cz + d = 0$, определяется по формуле

$$\sin \beta = \cos \gamma = \frac{aa_1 + bb_1 + cc_1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}.$$

6. В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AE и плоскостью BDD_1 , где E — середина ребра A_1B_1 .



Точку D примем за начало прямоугольной системы координат, а оси X, Y и Z направим по ребрам DA, DC и DD_1 .

Пусть α — искомый угол между прямой AE и плоскостью BDD_1 .

Известно, что $\sin \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|}$, где $\vec{a}$ — вектор, лежа-

щий на прямой m (или параллельный ей), $\vec{n}$ — нормаль к плоскости.

Выпишем координаты необходимых вершин куба: $A(1; 0; 0)$, $B(1; 1; 0)$, $C(0; 1; 0)$, $D(0; 0; 0)$, $B_1(1; 1; 1)$, $E\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$.

Найдем координаты вектора $\vec{AE}\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$.

Заметим, что плоскость BDD_1 является диагональным сечением куба, значит, любой вектор, перпендикулярный ей, например $\vec{AC}$, является нормалью к

плоскости BDD_1 , т. е. $\overline{AC}(1; -1; 0)$. Следовательно, искомый угол между прямой AE и плоскостью BDD_1

$$\text{будет равен } \sin \alpha = \frac{|\overline{AC} \cdot \overline{AE}|}{|\overline{AC}| \cdot |\overline{AE}|},$$

$$\text{где } |\overline{AC} \cdot \overline{AE}| = \left| 1 \cdot 0 + (-1) \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 1 \right| = \frac{1}{2};$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}; \quad |\overline{AE}| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Значит, } \sin \alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \text{ откуда } \alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$$\text{Ответ: } \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

7. (см. № 690) В основании прямого параллелепипеда $A...D_1$ лежит параллелограмм с острым углом 60° . Известно, что $AB : AD : AA_1 = 1 : 2 : 3$. Найдите угол между прямой B_1D и плоскостью грани AA_1D_1D .

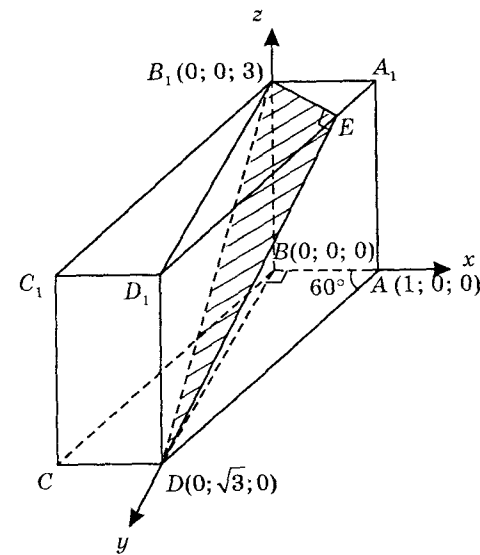
Введем в пространстве прямоугольную систему координат, приняв за начало точку $B(0; 0; 0)$.

Так как $A...D_1$ — прямой параллелепипед, то $BB_1 \perp BA$, $BB_1 \perp BD$. Прямые BA и BD примем соответственно за оси B_x и B_z .

Пусть $AB = a$, тогда $AD = 2a$. Из $\triangle ABD$ по теореме косинусов имеем $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ$, или $BD^2 = 3a^2$, $BD = a\sqrt{3}$.

Выходит, что $AD^2 = AB^2 + BD^2$, т. е. $\angle ABD = 90^\circ$.

Следовательно, прямую BD можно принять за ось B_y . Так как $BD = a\sqrt{3}$ и $AB : AA_1 = 1 : 3$, то получим:



$A(1; 0; 0)$, $B_1(0; 0; 3)$, $D(0; \sqrt{3}; 0)$, $D_1(0; \sqrt{3}; 3)$,

$\overline{B_1D}(0; \sqrt{3}; -3)$. Пусть $\vec{n}(n_1; n_2; n_3)$ — нормаль к плос-

кости AA_1D . Найдём координаты вектора $\vec{n}$.

Так как $\vec{n} \perp (AA_1D_1)$, то $\vec{n} \perp \overline{DD_1}$ и $\vec{n} \perp \overline{AD}$.

Поскольку $\overline{DD_1}(0; 0; 3)$, $\overline{AD}(-1; \sqrt{3}; 0)$, то получим

$$\begin{cases} 3n_3 = 0, \\ -n_1 + \sqrt{3}n_2 = 0; \end{cases} \quad n_3 = 0, \text{ полагая } n_2 = \sqrt{3}, \text{ имеем } n_1 = 3.$$

Таким образом, в качестве нормального вектора плоскости AA_1D можно взять вектор $\vec{n}(3; \sqrt{3}; 0)$.

Пусть φ — искомый угол, тогда

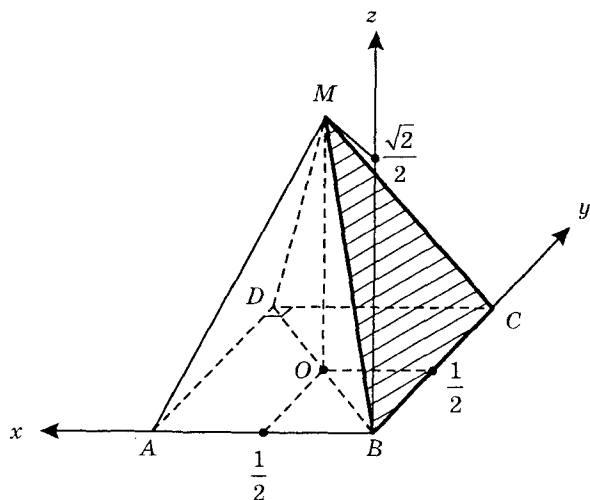
$$\sin \varphi = \left| \cos(\vec{n}, \overline{B_1D}) \right| = \frac{|3|}{\sqrt{3+9} \cdot \sqrt{3+9}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{12}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}, \text{ откуда } \varphi = \arcsin \frac{1}{4}.$$

Ответ: $\arcsin \frac{1}{4}$.

Замечание. Решая задачу обычным классическим методом, получим, что $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{15}}$. Можно показать, что $\arcsin \frac{1}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{15}}$.

8. (см. № 106) В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой BD и плоскостью MBC .



Введем прямоугольную систему координат так, чтобы точка B являлась ее началом, тогда $B(0; 0; 0)$.

Известно, что уравнение плоскости имеет вид $ax + by + cz + d = 0$, где a, b, c — координаты вектора нормали к плоскости (т. е. вектора, перпендикулярного плоскости).

Запишем теперь уравнение плоскости MBC , для чего найдем координаты точек M и C , а затем подставим в уравнение плоскости.

По условию задачи все ребра равны 1, тогда $C(0; 1; 0)$. Остается найти координаты точки M . Для этого сначала находим координаты ее проекции на плоскость основания $ABCD$, а затем ее координаты по оси OZ :

$$M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \text{ Поскольку плоскость } MBC \text{ проходит}$$

через точку B (начало координат), то $d = 0$. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} b = 0, \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{\sqrt{2}}{2}c = 0; \end{cases} \begin{cases} b = 0, \\ a + \sqrt{2}c = 0; \end{cases} \begin{cases} b = 0, \\ a = -\sqrt{2}c. \end{cases}$$

Следовательно, уравнение плоскости имеет вид

$$-\sqrt{2}cx + 0 \cdot y + cz = 0, \text{ или } -\sqrt{2}x + z = 0.$$

Итак, вектор нормали к плоскости MBC имеет координаты: $\vec{n}(-\sqrt{2}; 0; 1)$. Так как $B(0; 0; 0)$, $D(1; 1; 0)$,

то $\overrightarrow{BD}(1; 1; 0)$.

Пусть α — искомый угол между прямой BD и плоскостью MBC , тогда

$$\sin \alpha = \left| \frac{-\sqrt{2} \cdot 1}{\sqrt{(-\sqrt{2})^2 + 1} \cdot \sqrt{1+1}} \right| = \left| \frac{-\sqrt{2} \cdot 1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$.

13.3. Угол между двумя плоскостями

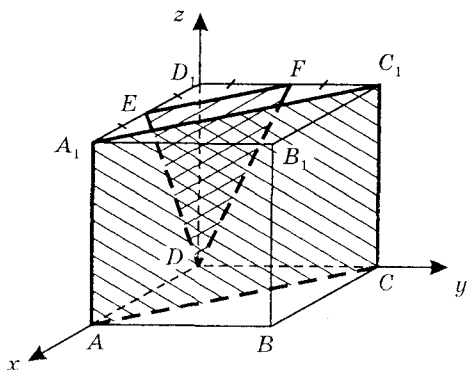
1. Угол между плоскостями равен углу между прямыми, содержащими нормали к этим плоскостям.

2. В уравнении плоскости $ax + by + cz + d = 0$ коэффициенты $(a; b; c)$ являются координатами вектора нормали к плоскости.

3. Угол между плоскостями определяется по формуле $\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$.

4. Поскольку при пересечении двух плоскостей образуется 4 угла, то необходимо взять меньший из них. В этом случае $\cos \varphi \geq 0$.

9. В кубе $A...D_1$ найдите угол между плоскостями DEF и ACC_1 , где E и F — середины ребер соответственно A_1D_1 и D_1C_1 .



Очевидно, что плоскости AEF и ACC_1 пересекаются вне куба. При обычном способе решения нам пришлось бы строить их линию пересечения. Однако векторно-координатный метод значительно упрощает решение.

Для этого точку D примем за начало координат, а ребра куба DA , DC и DD_1 примем соответственно за оси X , Y , Z .

Известно, что угол α между плоскостями равен углу между нормальными к этим плоскостям, т. е.

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Поскольку при пересечении двух плоскостей образуется 4 угла, то берем меньший из них. В этом случае косинус угла будет неотрицателен.

Отметим координаты нужных нам точек $D(0; 0; 0)$, $B(1; 1; 0)$, $E\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$, $F\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$, тогда

$$\vec{n}_1 = \overrightarrow{DB}(1; 1; 0).$$

Составим уравнение плоскости DEF : $Ax + By + Cz + D = 0$. Подставим вместо x, y, z соответствующие координаты точек D, E и F .

$$\begin{cases} 0 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C + D = 0, & D = 0, \\ \frac{1}{2} \cdot A + 0 \cdot B + 1 \cdot C + D = 0, & \frac{1}{2} A + C = 0, \\ 0 \cdot A + \frac{1}{2} \cdot B + 1 \cdot C + D = 0; & \frac{1}{2} B + C = 0. \end{cases}$$

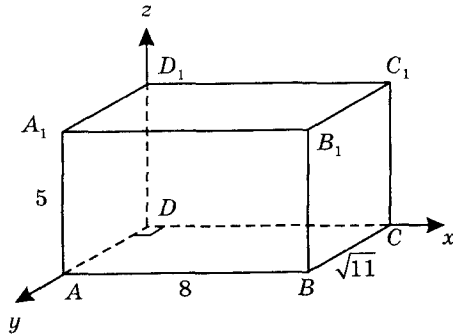
Удобно взять $C = -1$, тогда $A = B = 2$ и уравнение плоскости DEF примет вид $2x + 2y - z = 0$, тогда нормаль к плоскости DEF будет $\vec{n}_2(2; 2; -1)$.

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } \cos \alpha &= \frac{|1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \\ &= \frac{4}{\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \text{ тогда } \alpha = \arccos \frac{2\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

10. Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 8$, $BC = \sqrt{11}$.

Найдите угол между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра AB перпендикулярно прямой BD_1 , если расстояние между прямыми $A_1 C_1$ и BD равно 5.



Заметим, что прямые $A_1 C_1$ и BD лежат в параллельных плоскостях $ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$, значит, расстояние между ними равно расстоянию между плоскостями, т. е. высоте призмы. Значит, $AA_1 = 5$.

Введем прямоугольную систему координат, приняв точку D за начало координат. Искомый угол между плоскостями равен углу между прямыми, содержащими нормали к этим плоскостям. Следовательно, нам надо найти угол между вектором $\overrightarrow{BD_1}$ и вектором $\overrightarrow{DD_1}$ (это вектор нормали к плоскости основания).

Находим $D_1(0; 0; 5)$, $B(8; \sqrt{11}; 0)$, $\overrightarrow{BD_1}(8; \sqrt{11}; -5)$, $\overrightarrow{DD_1}(0; 0; -5)$.

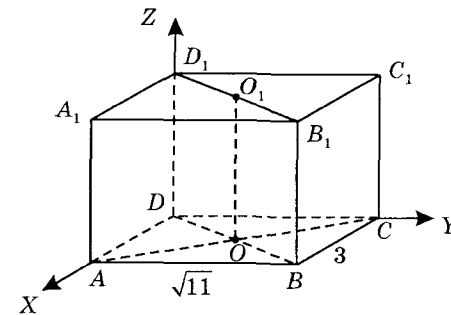
Пусть α — искомый угол между векторами $\overrightarrow{BD_1}$ и $\overrightarrow{DD_1}$, тогда

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{|\overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{DD_1}|}{|\overrightarrow{BD_1}| \cdot |\overrightarrow{DD_1}|} = \\ &= \frac{8 \cdot 0 + \sqrt{11} \cdot 0 + (-5) \cdot (-5)}{\sqrt{8^2 + (\sqrt{11})^2 + (-5)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + (-5)^2}} = \\ &= \frac{25}{\sqrt{64 + 11 + 25} \cdot 5} = \frac{5}{\sqrt{100}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \text{ откуда } \alpha = 60^\circ. \end{aligned}$$

Ответ: 60° .

11. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольник $ABCD$, где $AB = \sqrt{11}$, $BC = 3$.

Найдите угол между плоскостями грани $DD_1 C_1 C$ и плоскостью, проходящей через середину ребра $BC \perp A_1 C$, если известно, что расстояние между прямыми $D_1 B_1$ и AC равно $\sqrt{5}$.



Точку D примем за начало прямоугольной системы координат, т. е. $D(0; 0; 0)$. Стороны DA , DC и DD_1 примем соответственно за оси X , Y , Z .

Найдем высоту призмы. По условию задачи расстояние между прямыми $D_1 B_1$ и AC равно $\sqrt{5}$. Заметим, что прямые $D_1 B_1$ и AC — скрещивающиеся, тогда расстояние между ними равно длине их общего пер-

пендикуляра, т. е. OO_1 , где O и O_1 — точки пересечения соответственно диагоналей нижнего и верхнего оснований призмы.

Итак, $OO_1 = DD_1 = \sqrt{5}$.

Заметим, что нормаль к плоскости грани DD_1C_1C — это любой вектор, перпендикулярный к ней, например, $\overrightarrow{DA}$ (3; 0; 0), или вектор $\overrightarrow{n_1}$ (1; 0; 0). Если плоскость перпендикулярна прямой A_1C , то A_1C и есть нормаль к этой плоскости.

Найдем координаты точек A_1 и C .

$A_1(3; 0; \sqrt{5})$, $C(0; \sqrt{11}; 0)$, тогда

$\overrightarrow{A_1C}(-3; -\sqrt{11}; -\sqrt{5})$, где $\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{n_2}$. Теперь находим искомый угол

$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|},$$

где $|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}| = |1 \cdot (-3) + 0 \cdot (-\sqrt{11}) + 0 \cdot (-\sqrt{5})| = |-3| = 3$,

$$|\overrightarrow{n_1}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1,$$

$$|\overrightarrow{n_2}| = \sqrt{(-3)^2 + (-\sqrt{11})^2 + (-\sqrt{5})^2} = 5.$$

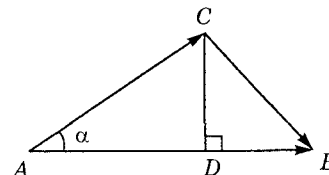
Следовательно, $\cos \alpha = \frac{3}{1 \cdot 5} = \frac{3}{5}$, откуда $\alpha = \arccos \frac{3}{5}$.

Ответ: $\arccos \frac{3}{5}$.

13.4. Расстояние от точки до прямой

Для определения расстояния от точки до прямой обычно рассматривают треугольник, одной из вершин которого является данная точка, а две другие лежат

на прямой, тогда искомое расстояние находят как высоту этого треугольника.



Пусть вершины A , B и C имеют координаты:

$A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$.

Расстояние от точки C до стороны AB — это длина перпендикуляра CD , опущенного из вершины C на прямую, содержащую сторону AB .

Тогда $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$,

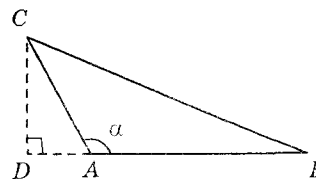
$\overrightarrow{AC}(x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A)$.

Пусть α — угол между векторами, тогда

$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}.$$

Значит, $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$.

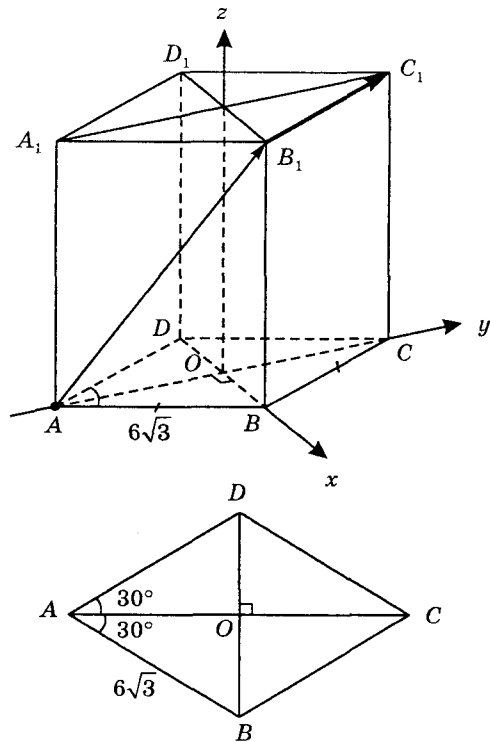
Из $\triangle ADC$ $CD = AC \sin \alpha = |\overrightarrow{AC}| \sin \alpha$.



Если $\angle CAB = \alpha > 90^\circ$, то $\cos \alpha < 0$. В этом случае длину CD находим из $\triangle CAD$, где $\angle CAD$ — искомый угол между AC и AB .

12. Основанием прямоугольного параллелепипеда $A...D_1$ является ромб, сторона которого равна $6\sqrt{3}$, а острый угол — 60° .

Найдите расстояние от точки A до прямой B_1C_1 , если высота параллелепипеда равна 10.



Поместим начало системы координат в точке O пересечения диагоналей AC и BD ромба $ABCD$, а оси направим вдоль диагоналей.

В $\triangle AOB$ $OB = \frac{1}{2} AB = 3\sqrt{3}$ (по свойству катета, ле-

жащего против угла 30°).

$$AO = AB \cdot \cos 30^\circ = 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9.$$

Найдем координаты точек A , B_1 , C_1 :

$A(0; -9; 0)$, $B_1(3\sqrt{3}; 0; 10)$, $C_1(0; 9; 10)$.

Теперь найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}$:

$\overrightarrow{AB_1}(3\sqrt{3}; 9; 10)$, $\overrightarrow{B_1C_1}(-3\sqrt{3}; 9; 0)$, тогда

$$|\overrightarrow{AB_1}| = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 9^2 + 10^2} = \sqrt{27 + 81 + 100} = 4\sqrt{13};$$

$$|\overrightarrow{B_1C_1}| = \sqrt{(-3\sqrt{3})^2 + 9^2} = \sqrt{27 + 81} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned} \cos \angle AB_1C_1 &= \frac{\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{B_1C_1}}{|\overrightarrow{AB_1}| \cdot |\overrightarrow{B_1C_1}|} = \\ &= \frac{3\sqrt{3} \cdot (-3\sqrt{3}) + 9 \cdot 9 + 0}{4\sqrt{13} \cdot 6\sqrt{3}} = \frac{54}{24\sqrt{39}} = \frac{9}{4\sqrt{39}}. \end{aligned}$$

$$\text{Значит, } \sin \angle AB_1C_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{9}{4\sqrt{39}}\right)^2} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{181}{13}}.$$

Искомое расстояние d от точки A до прямой B_1C_1

$$\text{будет равно } d = |\overrightarrow{AB_1}| \cdot \sin \angle AB_1C_1 = 4\sqrt{13} \cdot \frac{1}{4} \sqrt{\frac{181}{13}} = \sqrt{181}.$$

Ответ: $\sqrt{181}$.

13.5. Расстояние от точки до плоскости

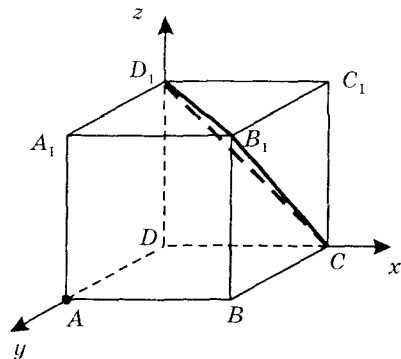
Для нахождения расстояния от точки до плоскости обычно опускают перпендикуляр из этой точки на данную плоскость и затем находят длину этого перпендикуляра.

Пусть ρ — расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $ax + by + cz + d = 0$, тогда

$$\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Рассмотрим примеры на нахождение расстояния от точки до плоскости.

13. В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости CB_1D_1 .



Введем прямоугольную систему координат так, чтобы точка D служила ее началом.

Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $ax + by + cz + d = 0$ определяется по формуле

$$\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad (1)$$

В данном случае роль точки M_0 играет точка $A(0; 1; 0)$, т. е. $x_0 = 0, y_0 = 1, z_0 = 0$.

Нам надо найти значения a, b, c и d в уравнении $ax + by + cz + d = 0$ плоскости CB_1D_1 , где $C(1; 0; 0)$, $B_1(1; 1; 1)$, $D_1(0; 0; 1)$. Для удобства возьмем $d = 1$.

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 \cdot a + 0 \cdot b + 1 \cdot c + 1 = 0, \\ 1 \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot c + 1 = 0, \\ 1 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + 1 = 0; \end{cases} \begin{cases} c + 1 = 0, \\ a + b + c + 1 = 0, \\ a + 1 = 0; \end{cases} \begin{cases} a = -1, \\ b = 1, \\ c = -1. \end{cases}$$

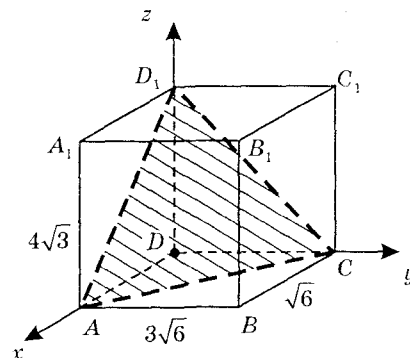
Учитывая формулу (1), значения a, b, c и координаты точки $A(0; 1; 0)$, находим искомое расстояние от точки A до плоскости CB_1D_1 .

$$\rho = \frac{|-1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

14. В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит прямоугольник $ABCD$, где $AB = 3\sqrt{6}$, $BC = \sqrt{6}$. Высота параллелепипеда $AA_1 = 4\sqrt{3}$.

Найдите расстояние от точки D до плоскости AD_1C .



Точку D примем за начало прямоугольной системы координат, а координатные оси направим по прямым DA, DC и DD_1 , тогда $D(0; 0; 0)$, $D_1(0; 0; 4\sqrt{3})$, $A(3\sqrt{6}; 0; 0)$, $C(0; \sqrt{6}; 0)$.

Запишем уравнение плоскости AD_1C , для чего подставим координаты точек D_1 , A и C в уравнение плоскости $ax + by + cz + d = 0$. Имеем:

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 4\sqrt{3} + d = 0, \\ a \cdot \sqrt{6} + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0, \\ a \cdot 0 + b \cdot 3\sqrt{6} + c \cdot 0 + d = 0; \end{cases} \begin{cases} 4\sqrt{3}c + d = 0, \\ \sqrt{6}a + d = 0, \\ 3\sqrt{6}b + d = 0. \end{cases}$$

Выберем для удобства $d = -\sqrt{6}$, тогда получим:

$$\begin{cases} 4\sqrt{3}c = \sqrt{6}, \\ \sqrt{6}a = \sqrt{6}, \\ 3\sqrt{6}b = \sqrt{6}; \end{cases} \begin{cases} c = \frac{\sqrt{2}}{4}, \\ a = 1, \\ b = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Искомое расстояние ρ от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $ax + by + cz + d = 0$ находим по формуле

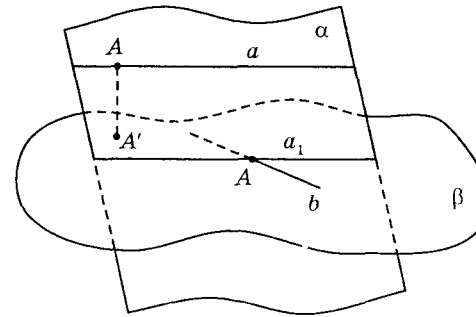
$$\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \text{ где роль точки } M_0 \text{ играет точка } D(0; 0; 0), \text{ тогда получим}$$

$$\rho = \frac{\left| 1 \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot 0 - \sqrt{6} \right|}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{178}}{12}} = \frac{12\sqrt{6}}{\sqrt{178}} = \frac{12\sqrt{267}}{89}.$$

Ответ: $\frac{12\sqrt{267}}{89} \approx 2,2$.

13.6. Расстояние между двумя прямыми

Для определения расстояния между скрещивающимися прямыми a и b можно поступить так.



Через одну из прямых, например a , и некоторую точку M проведем плоскость α , и в плоскости α через точку M проведем прямую $a_1 \parallel a$. Теперь через прямые a_1 и b проведем плоскость β . Поскольку $a \parallel a_1$, то $a \parallel \beta$. Расстояние AA_1 равно расстоянию между скрещивающимися прямыми a и b .

Следовательно, нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми сводится к задаче нахождения расстояния от точки до плоскости.

15. (см. № 268) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB и CB_1 .

Введем систему координат так, как показано на рисунке.

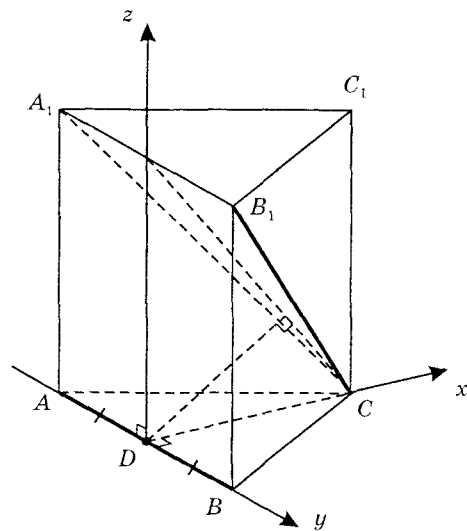
В этом случае координаты точки D и точек A_1 , B_1 и C , задающих плоскость A_1B_1C , будут определяться наиболее простым способом, так как будут содержать максимум нулей, что облегчит вычисления.

По условию задачи все ребра равны 1, тогда имеем

$$A_1\left(0; -\frac{1}{2}; 1\right), B_1\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right), D(0; 0; 0).$$

Как известно, уравнение плоскости имеет вид $ax + by + cz + d = 0$, а расстояние ρ от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости вычисляется по формуле

$$\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad (1)$$



Примем $d = 1$ и подставим координаты точек A_1 , B_1 и C в уравнение плоскости. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 \cdot a - \frac{1}{2} \cdot b + c + 1 = 0, \\ 0 \cdot a + \frac{1}{2} \cdot b + c + 1 = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + 1 = 0; \end{cases} \begin{cases} -\frac{1}{2} \cdot b + c + 1 = 0, \\ \frac{1}{2} \cdot b + c + 1 = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a + 1 = 0; \end{cases} \begin{cases} a = -\frac{2}{\sqrt{3}}, \\ b = 0, \\ c = -1. \end{cases}$$

Подставляя значения a , b , c и координаты точки D в формулу (1), находим

$$\rho = \frac{\left| -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 1 \right|}{\sqrt{\frac{4}{3} + 0 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Ответы

§ 1. Угол между двумя прямыми

- | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| 1. 90° . | 23. $\arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$. |
| 2. 90° . | 24. $\arccos \frac{1}{4}$. |
| 3. 45° . | 25. $\arccos 0,7$. |
| 4. $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$. | 26. $\arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$. |
| 5. 90° . | 27. $\arccos \frac{1}{4}$. |
| 6. 60° . | 28. 90° . |
| 7. 60° . | 29. 45° . |
| 8. 60° . | 30. 45° . |
| 9. 60° . | 31. 60° . |
| 10. $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$. | 32. 60° . |
| 11. 60° . | 33. $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$. |
| 12. 90° . | 34. $\arccos \frac{5\sqrt{2}}{8}$. |
| 13. 60° . | 35. $\arccos \frac{1}{4}$. |
| 14. 90° . | 36. $\arccos \frac{3}{4}$. |
| 15. $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$. | 37. $\arccos \frac{\sqrt{2}}{8}$. |
| 16. 60° . | |
| 17. 90° . | |
| 18. $\arctg \sqrt{2}$. | |
| 19. 60° . | |
| 20. 45° . | |
| 21. $\arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$. | |
| 22. $\arccos \frac{1}{4}$. | |

38. $\arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$.

39. 90° .

40. $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$.

41. 90° .

42. $\arccos \frac{\sqrt{5}}{10}$.

43. $\arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$.

44. $\arccos \frac{1}{5}$.

45. $\arccos \frac{1}{8}$.

46. $\arccos \frac{1}{5}$.

47. $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$.

48. $\arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$.

49. $\arccos \frac{3}{4}$.

50. $\arccos \frac{3}{4}$.

51. $\arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$.

52. $\arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$.

53. 90° .

54. $\arccos \frac{\sqrt{2}}{3}$.

55. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{6}$.

56. $\arccos \frac{1}{\sqrt{6}}$.

57. $\arctg \sqrt{2}$.

58. 30° .

59. 60° .

60. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

61. $\frac{1}{4}$.

62. 60° .

§ 2. Угол между прямой и плоскостью

63. 45° .

64. 30° .

65. 30° .

66. 45° .

67. $\arctg \frac{1}{\sqrt{2}}$.

68. 0° .

69. $\arctg \sqrt{2}$.

70. $\arctg \frac{1}{\sqrt{2}}$.

71. 0° .

72. $\arctg \frac{1}{\sqrt{2}}$.

73. $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$.

74. $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$.

75. $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$.

76. 30° .

77. $\arctg \frac{1}{\sqrt{2}}$.

78. $\arctg \frac{\sqrt{3}}{2}$.

79. $\arctg \frac{\sqrt{3}}{2}$.

80. 60° .

81. $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}$.

82. $\arcsin \frac{\sqrt{21}}{7}$.

83. $\arctg \frac{\sqrt{3}}{2}$.

84. 90° .

85. 45° .

86. 30° .

87. $\arctg \frac{1}{2}$.

88. 60° .

89. $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}$.

90. $\arctg \frac{\sqrt{3}}{2}$.

91. 45° .

92. $\arcsin \frac{3}{\sqrt{42}}$.

93. $\arctg 1,5$.

94. $\arcsin \frac{4}{\sqrt{26}}$.

95. $\arcsin \frac{3}{4}$.

96. 60° .

97. 45° .

98. 60° .

99. $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}$.

100. $\arcsin \frac{\sqrt{15}}{5}$.

101. $\arccos \frac{1}{3}$.

102. $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$.

103. $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$.

104. $\arccos \frac{\sqrt{7}}{3}$.

105. $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{3}$.

106. $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$.

107. $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$.

108. $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

109. $\frac{3}{\sqrt{15}}$.

110. $\frac{\sqrt{15}}{10}$.

§ 3. Угол между двумя плоскостями

111. 90° .

112. 90° .

113. 90° .

114. 45° .

115. $\arctg \sqrt{2}$.

116. $\arctg \sqrt{2}$.

117. 90° .

118. 60° .

119. $\arctg \sqrt{2}$.

120. $\arccos \frac{1}{3}$.

121. $\arctg \sqrt{2}$.

122. 60° .

123. $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$.

124. 60° .

125. 90° .

126. $\arccos \frac{2}{\sqrt{3}}$.

127. $\arccos \frac{1}{7}$.

128. $\arctg \frac{2}{\sqrt{3}}$.

129. 60° .

130. 120° .

131. 90° .

132. 90° .

133. 60° .

134. 30° .

135. 30° .

136. 45° .

137. $\arctg \frac{2}{\sqrt{3}}$.

138. $\arctg \frac{2}{\sqrt{3}}$.

139. $\arccos \frac{1}{7}$.

140. $\arctg \frac{2}{3}$.

141. $\arctg \frac{2}{3}$.

142. 60° .

143. 30° .

144. 45° .

145. $\arccos \frac{1}{3}$.

146. $\arccos \left(-\frac{1}{3} \right)$.

147. $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$.

148. 45° .

149. $0,2$.

150. $0,6$.

151. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

§ 4. Расстояние от точки до прямой

152. 1 .

153. $\sqrt{2}$.

154. 1 .

155. $\sqrt{2}$.

156. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

157. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

158. 1 .

159. $\sqrt{2}$.

160. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

161. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

162. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

163. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

164. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

165. 1 .

166. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

167. $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

168. $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

169. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

170. $\frac{\sqrt{14}}{4}$.

171. $\frac{\sqrt{14}}{4}$.

172. 1.

173. $\sqrt{3}$.

174. 2.

175. $\sqrt{3}$.

176. $\sqrt{3}$.

177. 1.

178. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

179. 1.

180. $\frac{1}{2}$.

181. $\frac{3}{2}$.

182. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

183. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

184. 2.

185. 2.

186. $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

187. $\frac{\sqrt{14}}{4}$.

188. $\sqrt{3}$.

189. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

190. 1.

191. $\frac{\sqrt{30}}{5}$.

192. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

193. $\frac{\sqrt{39}}{4}$.

194. $\sqrt{2}$.

195. $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

196. $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

197. $\sqrt{3}$.

198. $\frac{\sqrt{30}}{5}$.

199. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

200. 2.

201. $\frac{\sqrt{15}}{4}$.

202. $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

203. $\sqrt{3}$.

204. $\frac{\sqrt{39}}{4}$.

205. $\frac{\sqrt{42}}{4}$.

§ 5. Расстояние от точки до плоскости

206. 1.

207. 1.

208. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

209. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

210. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

211. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

212. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

213. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

214. $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

215. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

216. $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

217. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

218. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

219. 1.

220. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

221. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

222. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

223. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

224. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

225. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

226. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

227. 1.

228. $\sqrt{3}$.

229. $\sqrt{3}$.

230. 1.

231. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

232. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

233. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

234. $\frac{1}{2}$.

235. $\frac{3}{2}$.

236. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

237. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

238. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

239. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

240. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

241. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

242. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

243. $\frac{1}{2}$.

244. $\frac{2\sqrt{15}}{5}$.

245. $\frac{9}{\sqrt{39}}$.

246. $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

247. $\frac{3}{\sqrt{39}}$.

§ 6. Расстояние между двумя прямыми

248. 1.

249. 1.

250. 1.

251. $\sqrt{2}$.

252. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

253. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

254. 1.

255. 1.

256. 1.

257. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

258. $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

259. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

260. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

261. $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

262. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

263. 1.

264. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

265. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

266. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

267. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

268. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

269. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

270. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

271. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

272. 1.

273. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

274. $\sqrt{3}$.

275. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

276. $\sqrt{3}$.

277. $\sqrt{3}$.

278. $\sqrt{3}$.

279. $\frac{3}{2}$.

280. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

281. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

282. $\sqrt{3}$.

283. $\frac{\sqrt{30}}{10}$.

284. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

285. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

286. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

287. $\frac{1}{2}$.

288. $\arctg \sqrt{2}$.

289. $\frac{6}{\sqrt{39}}$.

290. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

291. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

§ 7. Площади сечений многогранников

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------|
| 292. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. | 305. $\frac{3\sqrt{114}}{25}$. |
| 293. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. | 306. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. |
| 294. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. | 307. $\frac{21}{16}$. |
| 295. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. | 308. $\sqrt{5}$. |
| 296. $\frac{7\sqrt{17}}{24}$. | 309. $\sqrt{2}$. |
| 297. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. | 310. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. |
| 298. $\frac{3\sqrt{21}}{16}$. | 311. $\frac{\sqrt{17}}{2}$. |
| 299. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. | 312. 0,5. |
| 300. $\frac{9}{8}$. | 313. $\frac{3\sqrt{19}}{16}$. |
| 301. $\frac{9}{8}$. | 314. $\frac{3\sqrt{7}}{16}$. |
| 302. $\frac{9}{8}$. | 315. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. |
| 303. $\sqrt{2}$. | 316. $\frac{3\sqrt{19}}{16}$. |
| 304. $\frac{27\sqrt{6}}{50}$. | 317. $\frac{\sqrt{7}}{4}$. |
| | 318. 2. |
| | 319. $\sqrt{6}$. |

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| 320. 3. | 330. $\frac{3\sqrt{11}}{16}$. |
| 321. $\sqrt{6}$. | 331. $\frac{3\sqrt{3}}{16}$. |
| 322. $\frac{3\sqrt{7}}{4}$. | 332. 0,5. |
| 323. $\frac{3\sqrt{7}}{4}$. | 333. $12\sqrt{2}$. |
| 324. 0,25. | 334. $12\sqrt{2}$. |
| 325. $\frac{\sqrt{3}}{16}$. | 335. $4\sqrt{5}$. |
| 326. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. | 336. $8\sqrt{5}$. |
| 327. $\frac{\sqrt{11}}{16}$. | 337. $6\sqrt{3}$. |
| 328. 0,5. | 338. 12. |
| 329. $\frac{3\sqrt{11}}{16}$. | 339. $2\sqrt{5}$. |
| | 340. $12\sqrt{2}$. |
| | 341. $8\sqrt{5}$. |
| | 342. $8\sqrt{13}$. |

§ 8. Площади поверхностей вращения плоских фигур

- | | |
|---------------------------------|--------------------------------|
| 343. 2π . | 350. $6\sqrt{5}\pi$. |
| 344. $\sqrt{2}\pi$. | 351. $\sqrt{2}\pi$. |
| 345. $4\sqrt{2}\pi$. | 352. $\sqrt{2}\pi$. |
| 346. 12π . | 353. $2\sqrt{5}\pi$. |
| 347. 4π . | 354. $\frac{6\pi}{\sqrt{5}}$. |
| 348. 4π . | 355. 270π . |
| 349. $\frac{24\pi}{\sqrt{5}}$. | |

- | | |
|-------------------------|----------------------|
| 356. 1440π . | 363. 4π . |
| 357. 14π . | 364. $\sqrt{3}\pi$. |
| 358. $26,4\pi$. | 365. π . |
| 359. 40π . | 366. 6π . |
| 360. 25π . | 367. 4π . |
| 361. $\frac{3\pi}{4}$. | 368. 3π . |
| 362. $\sqrt{3}\pi$. | 369. 3π . |
| | 370. 12π . |
| | 371. 6π . |

§ 9. Объемы тел вращения плоских фигур

- | | |
|----------------------------------|---------------------------------|
| 372. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. | 383. 280π . |
| 373. 3π . | 384. 3400π . |
| 374. 2π . | 385. $\frac{\sqrt{3}\pi}{12}$. |
| 375. π . | 386. 12π . |
| 376. $\frac{8\pi}{\sqrt{5}}$. | 387. $\frac{192\pi}{5}$. |
| 377. $2\sqrt{5}\pi$. | 388. 32π . |
| 378. $\frac{\pi}{3}$. | 389. $\frac{\sqrt{3}\pi}{24}$. |
| 379. $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$. | 390. $\frac{\pi}{4}$. |
| 380. $\frac{\sqrt{2}\pi}{12}$. | 391. $\frac{\sqrt{3}\pi}{4}$. |
| 381. $\frac{4\pi}{3}$. | 392. $\frac{3\sqrt{3}\pi}{4}$. |
| 382. $\frac{4\sqrt{5}\pi}{15}$. | 393. π . |
| | 394. $\frac{5\pi}{4}$. |

- | | |
|---------------------------------|-----------------------------------|
| 395. $\frac{4\pi}{3}$. | 402. $\frac{3\sqrt{3}\pi}{4}$. |
| 396. $\frac{7\pi}{3}$. | 403. 9π . |
| 397. $\frac{7\pi}{3}$. | 404. $\frac{73\sqrt{3}\pi}{12}$. |
| 398. $\frac{5\pi}{3}$. | 405. 7π . |
| 399. $\frac{\pi}{4}$. | 406. 5π . |
| 400. $\frac{\pi}{4}$. | 407. $\frac{4\pi}{3}$. |
| 401. $\frac{\sqrt{3}\pi}{12}$. | 408. $\frac{5\pi}{3}$. |
| | 409. $\frac{4\pi}{3}$. |

§ 10. Объемы тел вращения многогранников

- | | |
|---------------------------------|--------------------------------|
| 410. 2π . | 415. $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$. |
| 411. $\frac{\pi}{2}$. | 416. $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$. |
| 412. π . | 417. 80π . |
| 413. $\frac{\pi}{3}$. | 418. 104π . |
| 414. $\frac{\sqrt{2}\pi}{12}$. | |

§ 11. Многогранники

- | | |
|--------------|--------------|
| 419. 125 . | 422. 108 . |
| 420. 4 . | 423. 5 . |
| 421. 4 . | 424. 4 . |

425. 4.
 426. 6.
 427. 512.
 428. 98.
 429. $2\sqrt{2}$.
 430. 2.
 431. $\frac{8}{\sqrt{3}}$.
 432. 61.
 433. 5.
 434. 45° .
 435. 45° .
 436. 4.
 437. 320.
 438. $\frac{\sqrt{2}}{8}$.
 439. $\arctg 7$.
 440. 4.
 441. 69.
 442. 10.
 443. $\arctg \frac{15}{4}$.
 444. $2\sqrt{3}$.
 445. 2.
 446. 10.
 447. 3.
 448. 4.
 449. 4.
 450. 1.
 451. 3.
 452. $2\sqrt[3]{3}$.
 453. 2,5.
 454. $\frac{\sqrt[4]{6}}{2}$.
 455. 4.
 456. $\arctg 0,6$.
 457. 45° .
 458. 2.
 459. 13.
 460. $\frac{\sqrt{17}}{4}$.
 461. $192 + 32\sqrt{6}$.
 462. 6 и 3 или 4 и 7.
 463. $\sqrt{2}$.
 464. $\sqrt[3]{\frac{\sin \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}}$.
 465. 22.
 466. 9.
 467. $\arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}$.
 468. $\sqrt[6]{2}$.
 469. 2.
 470. 60° .
 471. 26.
 472. 10.
 473. $\sqrt{91}$.
 474. 72.
 475. 180.
 476. $\frac{3\sqrt{15}}{50}$.
 477. 21.
 478. 18.

479. 8.
 480. 5.
 481. $\frac{\sqrt{105}}{27}$.
 482. 2.
 483. 144.
 484. 192.
 485. 81.
 486. $6\sqrt{3}$.
 487. 3.
 488. $\arctg \frac{\sqrt{23}}{5}$.
 489. $\frac{4\sqrt{11}}{7}$.
 490. $\frac{4}{\sqrt{23}}$.
 491. $\arctg \sqrt{2}$.
 492. $\frac{\sqrt{2}}{6}$.
 493. 3.
 494. $\frac{\sqrt{6}}{8}$.
 495. $\frac{13\sqrt{13}}{8}$.
 496. $\frac{13\sqrt{39}}{12}$.
 497. 24.
 498. $\frac{\sqrt{57}}{6}$.
 499. $\frac{\sqrt{6}}{4}$.
 500. 4.
 501. $\arctg \frac{4\sqrt{2}}{11}$.
 502. 3,4.
 503. $\arctg \frac{1}{8}$.
 504. $\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$.
 505. 12.
 506. 3.
 507. 36.
 508. 20.
 509. $\frac{\sqrt{3}}{48}$.
 510. $\frac{\sqrt{6}}{12}(\sqrt{3} + 1)$.
 511. 9,5.
 512. 109.
 513. $\frac{7\sqrt{3}}{12}$.
 514. 54.
 515. 13.
 516. 8.
 517. 32.
 518. 48.
 519. 540.
 520. $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

521. $\frac{2}{3}$.
 522. $\frac{\sqrt{23}}{6}$.
 523. 1.
 524. $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$.
 525. $\frac{2}{3}$.
 526. 384.
 527. 324.
 528. $\frac{\sqrt{3}}{12}$.
 529. 1.
 530. $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$.
 531. $\frac{\sqrt{2}}{12}$.
 532. 9.
 533. 26.
 534. 768.
 535. 98.
 536. 13.
537. 872.
 538. 342.
 539. $\frac{7\sqrt{2}}{6}$.
 540. $\frac{7\sqrt{2}}{6}$.
 541. $\frac{14}{9}$.
 542. 2 и 8.
 543. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.
 544. $\frac{3\sqrt{39}}{2}$.
 545. 6.
 546. 384.
 547. 1.
 548. 298.
 549. 294.
 550. 66.
 551. 116.
 552. 31.
 553. 129.
 554. 21.
 555. 41.
 556. 7.
 557. 5.

§ 12. Фигуры вращения

558. 9.
 559. 5.
 560. 6.
 561. 3.
 562. 27.
563. 9.
 564. 175.
 565. 5.
 566. 225.
 567. 36.

568. 50.
 569. 0,25.
 570. 17.
 571. 45.
 572. 42.
 573. 507.
 574. 27.
 575. 72.
 576. 2,4.
 577. 0,25.
 578. $\sqrt[3]{\pi^2 - 1}$.
 579. π .
 580. 9π .
 581. 3.
 582. 500.
 583. $100\sqrt{2}$.
 584. 30.
 585. 220,5.
 586. 5.
 587. 8.
 588. 84π .
 589. 63π .
 590. $\pi\sqrt{(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{3})}$.
 591. 100π .
 592. 13,75.
 593. 6.
 594. 16.
 595. 108.
596. 8.
 597. 0,5625.
 598. 36.
 599. 12,5.
 600. 300.
 601. $\frac{\pi\sqrt{6}}{48}(\sqrt{3}+1)$.
 602. $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$.
 603. 7,5.
 604. 100.
 605. 4.
 606. 54.
 607. $\frac{\pi\sqrt{2}}{8}(\sqrt{3}+1)$.
 608. 72.
 609. 18.
 610. $2\pi(\sqrt{3}+1)$.
 611. 780π .
 612. 52π .
 613. 294π .
 614. 150.
 615. 1,5.
 616. $\frac{\pi}{48}(\sqrt{3}+1)$.
 617. $36\pi(5+3\sqrt{2})$.

§ 13. Дополнительные задачи

618. 16.
 619. 6.
 620. 72.
 621. 54.
622. 36.
 623. $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$.
 624. 3523.

625. 8.

626. 8.

627. $\frac{\sqrt{14}}{2}$.

628. 13 : 12.

629. $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

630. 24.

631. 2π .

632. 3.

633. 12.

634. 84.

635. 7.

636. 100.

637. 360.

638. 30.

639. $\operatorname{arctg} \frac{5}{48}$.

640. $\arccos \frac{7}{15}$.

641. 1.

642. $\operatorname{arctg} \frac{15}{16}$.

643. $\operatorname{arctg} 3$.

644. 4.

645. $\arccos 0,6$.

646. $\arccos \frac{23}{27}$.

647. 45° .

648. 3024.

649. $\frac{3}{8}(13 - \sqrt{65})$.

650. $\frac{16}{9} \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4} \right)$.

651. 60° .

652. $\sqrt{6}$.

653. 2 : 3.

654. 60° .

655. $CM=5, CD=\frac{16}{3}$.

656. $\operatorname{arctg} \frac{1}{6} \sqrt{3\sqrt{3}(2\pi - \sqrt{3})}$.

657. $\frac{686}{9}$.

658. $\frac{19+6\sqrt{2}}{17}$.

659. $\frac{40}{\sqrt{41}}$.

660. $\frac{7\sqrt{102}}{10}$.

661. $2\sqrt{21}$.

662. 2 : 11.

663. $2\sqrt{6}$.

664. $\frac{5\sqrt{6}}{3}$.

665. $\frac{24}{19}$.

666. $32\sqrt{3}$.

667. $\frac{\sqrt{14}}{3}$.

668. $\frac{48}{73}$.

669. $5\sqrt{6}, \arccos \frac{1}{5}$.

670. 30° .

671. $\frac{5\sqrt{310}}{13}$.

672. 4.

673. $\operatorname{arctg} \frac{4}{3}$.

674. $\frac{8}{3}$.

675. $\arccos \frac{\sqrt{30}}{10}$.

676. 90° .

677. $\frac{24}{13}$.

678. $\sqrt{2}$.

679. $\arcsin \frac{3\sqrt{39}}{26}$.

680. $\arcsin \frac{2\sqrt{35}}{15}$.

681. $\arccos \frac{9}{41}$.

682. $\arccos \frac{\sqrt{33}}{11}$.

683. $1 + \sqrt{2}$.

684. $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (1 + \sqrt{6})$.

§ 14. Применение метода координат

685. $\arccos \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

686. $\arccos \frac{3\sqrt{15}}{20}$.

687. 90° .

688. $\arccos \frac{\sqrt{42}}{21}$.

689. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

690. $\arcsin \frac{1}{4}$.

691. $\arcsin \frac{3}{\sqrt{10}}$.

692. $\operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{2}}{8}$.

693. $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{6}$.

694. 30° .

695. $\arcsin \frac{\sqrt{15}}{5}$.

696. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{6}$.

$$697. \arccos \frac{\sqrt{285}}{19}.$$

$$698. \arccos \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

$$699. \arccos \frac{3}{5}.$$

$$700. \arccos \frac{2}{3}.$$

Литература

Атанасян Л.С. Геометрия: учебник для 10–11 классов общеобразовательных учреждений. — М.: Просвещение, 2012.

Балаян Э.Н. Геометрия: задачи на готовых чертежах для подготовки к ЕГЭ. 10–11 классы. — 2-е изд. — Ростов н/Д: Феникс, 2015.

Балаян Э.Н. Репетитор по геометрии для подготовки к ГИА и ЕГЭ. — Ростов н/Д: Феникс, 2012.

Рыбкин Н. Сборник задач по геометрии. Стереометрия для 9 и 10 классов. — М.: Просвещение, 1972.

Содержание

Предисловие	3
Раздел I. Краткие теоретические сведения по курсу стереометрии для X–XI классов	5
§ 1. Многогранники	5
1. Призма	6
2. Параллелепипед	8
3. Пирамида	9
4. Дополнительные соотношения между элементами призмы и пирамиды	11
§ 2. Круглые тела	12
1. Цилиндр	13
2. Конус	14
3. Шар	15
§ 3. Векторы	17
Раздел II. Задачи для самостоятельного решения	23
§ 1. Угол между двумя прямыми	23
Куб	23
Правильная треугольная призма	23
Правильная шестиугольная призма	24
Правильный тетраэдр	25
Правильная четырехугольная пирамида	25
Правильная шестиугольная пирамида	25
§ 2. Угол между прямой и плоскостью	26
Куб	26
Правильная треугольная призма	26
Правильная шестиугольная призма	27
Правильный тетраэдр	28
Правильная четырехугольная пирамида	28
Правильная шестиугольная пирамида	28
§ 3. Угол между двумя плоскостями	29
Куб	29
Правильная треугольная призма	29
Правильная шестиугольная призма	29

Правильная четырехугольная пирамида	30
Правильная шестиугольная пирамида	30
§ 4. Расстояние от точки до прямой	31
Куб	31
Правильная треугольная призма	31
Правильная шестиугольная призма	31
Правильная шестиугольная пирамида	32
§ 5. Расстояние от точки до плоскости	33
Куб	33
Правильная треугольная призма	33
Правильная шестиугольная призма	34
Правильная четырехугольная пирамида	34
Правильная шестиугольная пирамида	35
§ 6. Расстояние между двумя прямыми	35
Куб	35
Правильная треугольная призма	36
Правильная шестиугольная призма	36
Правильная четырехугольная пирамида	36
Правильная шестиугольная пирамида	37
§ 7. Площади сечений многогранников	37
Куб	37
Прямоугольный параллелепипед	38
Правильная треугольная призма	38
Правильная шестиугольная призма	39
Правильный тетраэдр	39
Правильная четырехугольная пирамида	39
Многогранники	40
§ 8. Площади поверхностей вращения плоских фигур	44
Квадрат	44
Прямоугольник	44
Прямоугольный треугольник	45
Равнобедренный треугольник	45
Ромб	47
Круг и его части	48
Правильный шестиугольник	48
§ 9. Объемы тел вращения плоских фигур	48
Квадрат	48

Прямоугольник	49
Прямоугольный треугольник	49
Равнобедренный треугольник	50
Трапеция	50
Ромб	51
Правильный шестиугольник	51
Многоугольник	51
Круг и его части	52
§ 10. Объемы тел вращения многогранников	52
Куб	52
Правильная треугольная призма	53
Правильная четырехугольная пирамида	53
Правильная шестиугольная пирамида	53
Многогранники	53
Раздел III. Разные задачи	55
§ 11. Многогранники	55
Куб	55
Прямоугольный и прямой параллелепипед	56
Правильная и прямая треугольная призма	58
Правильная четырехугольная призма	60
Правильная шестиугольная призма	61
Правильная треугольная пирамида	62
Правильный тетраэдр	64
Треугольная пирамида	65
Треугольная усеченная пирамида	66
Правильная четырехугольная пирамида	66
Четырехугольная пирамида	68
Правильная четырехугольная усеченная пирамида	69
Правильная шестиугольная пирамида	70
Многогранники	71
§ 12. Фигуры вращения	75
Цилиндр	75
Конус	76
Усеченный конус	79
Шар	79
Треугольник	80
Прямоугольник	81
Параллелограмм и трапеция	82

§ 13. Дополнительные задачи	83
§ 14. Применение метода координат	92
Раздел IV. Решения наиболее трудных задач	94
§ 1. Угол между двумя прямыми	94
§ 2. Угол между прямой и плоскостью	102
§ 3. Угол между двумя плоскостями	111
§ 4. Расстояние от точки до прямой	119
§ 5. Расстояние от точки до плоскости	125
§ 6. Расстояние между двумя прямыми	132
§ 7. Площади сечений многогранников	139
§ 8. Площади поверхностей вращения плоских фигур	149
§ 9. Объемы тел вращения плоских фигур	153
§ 10. Объемы тел вращения многогранников	161
§ 11. Многогранники	165
§ 12. Фигуры вращения	187
§ 13. Применение метода координат	201
13.1. Угол между двумя прямыми	201
13.2. Угол между прямой и плоскостью	210
13.3. Угол между двумя плоскостями	216
13.4. Расстояние от точки до прямой	220
13.5. Расстояние от точки до плоскости	223
13.6. Расстояние между двумя прямыми	226
Ответы	229
§ 1. Угол между двумя прямыми	229
§ 2. Угол между прямой и плоскостью	230
§ 3. Угол между двумя плоскостями	232
§ 4. Расстояние от точки до прямой	233
§ 5. Расстояние от точки до плоскости	235
§ 6. Расстояние между двумя прямыми	236
§ 7. Площади сечений многогранников	238
§ 8. Площади поверхностей вращения плоских фигур	239
§ 9. Объемы тел вращения плоских фигур	240
§ 10. Объемы тел вращения многогранников	241

§ 11. Многогранники	241
§ 12. Фигуры вращения	244
§ 13. Дополнительные задачи	245
§ 14. Применение метода координат	247
Литература	249



Учебное издание

Балаян Эдуард Николаевич

МАТЕМАТИКА

Задачи типа 14 (C2)

Геометрия.

Стереометрия

(профильный уровень)

Ответственный редактор *С. Остахов*

Технический редактор *Л. Багрянцева*

Сдано в набор 15.10.2015. Подписано в печать 20.01.2016.

Формат 84 × 108 1/32. Бумага тип № 2.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 13,44. Тираж 3000 экз.

Заказ № 6.

ООО «Феникс»

344082, г. Ростов-на-Дону, пер. Халтуринский, 80.

Сайт издательства www.phoenixrostov.ru

Интернет-магазин www.phoenixbooks.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в ЗАО «Книга»

344019, г. Ростов-на-Дону, ул. Советская, 57.

Качество печати соответствует предоставленным диапозитивам.



Издательство
еникс

344011, г. Ростов-на-Дону,
ул. Варфоломеева, 150
Тел.: (863) 261-89-50;
www.phoenixrostov.ru

- ◆ Около 100 новых книг каждый месяц.
- ◆ Более 6000 наименований книжной продукции собственного производства.

ОСУЩЕСТВЛЯЕМ:

- ◆ Оптовую и розничную торговлю книжной продукцией.

ГАРАНТИРУЕМ:

- ◆ Своевременную доставку книг в любую точку страны, ЗА СЧЕТ ИЗДАТЕЛЬСТВА ж/д контейнерами.
- ◆ МНОГОУРОВНЕВУЮ систему скидок.
- ◆ РЕАЛЬНЫЕ ЦЕНЫ.
- ◆ Надежный ДОХОД от реализации книг нашего издательства.

ТОРГОВЫЙ ОТДЕЛ

344011, г. Ростов-на-Дону, ул. Варфоломеева, 150

Контактные телефоны:

Тел.: (863) 261-89-53, 261-89-54, 261-89-55
261-89-56, 261-89-57, факс. 261-89-58

Начальник Торгового отдела

Аникина Елена Николаевна

Тел.: (863) 261-89-53, torg153@aanet.ru



Эдуард Николаевич Балаян

профессор РАО, Заслуженный работник науки и образования, почетный доктор наук (DOCTOR OF SCIENCE, HONORIS CAUSA), известный учитель математики, автор более 100 книг. Имеет большой опыт работы, в том числе в специализированном математическом лицее. Его выпускники ныне работают в Российской Федерации, странах СНГ, дальнего и ближнего зарубежья, с благодарностью вспоминая его увлекательные уроки.

За многолетний педагогический труд, большой личный вклад в разработку учебно-методической литературы по математике награжден медалью им. В.И. Вернадского, почетной грамотой МО и науки РФ и другими наградами.

В настоящее время работает на подготовительном отделении Донского государственного технического университета (ДГТУ).

ФЕНИКС

ISBN 978-5-222-26810-0



9 785222 268100